

# 112 年公務人員高等考試三級考試試題

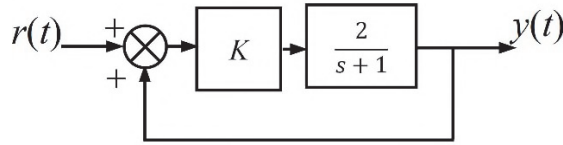
類 科：機械工程

科 目：自動控制

陳銘老師

一、下圖為一控制系統方塊圖，其中  $r(t)$  為輸入， $y(t)$  為輸出。

(每小題 10 分，共 30 分)



(一) 假設  $K=1$  且輸入為一單位步階 (unit step) 函數，求解輸出  $y(t)$ 。

(二) 假設  $K=1$ ，求解此系統之增益邊界 (gain margin)，以分貝 (dB) 為單位。

(三) 如欲使此系統之相位邊界 (phase margin) 為  $135^\circ$ ，比例控制器  $K$  值該如何設計？

1. 《考題難易》(★：非常簡單 / ★★：簡單 / ★★★：普通 / ★★★★：困難 / ★★★★★：非常困難)

★★★

2. 《破題關鍵》：(請老師針對該題目做關鍵字及重要爭點的標註)

需先化成單位增益負回授後再解題

【擬答】

$$\text{(一)} \frac{Y}{R} = \frac{\frac{2}{s+1}}{1 - \frac{2}{s+1}} = \frac{2}{s-1} \Rightarrow Y(s) = \frac{2}{s-1} \times \frac{1}{s} = -2 \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} \right)$$

$$\therefore y(t) = (-2 + 2e^t)u(t)$$

$$\text{(二)} \text{若化成單位增益負回授等效 } G(s) = \frac{\frac{2}{s+1}}{1 - 2 \times \frac{2}{s+1}} = \frac{2}{s-3}$$

$$\text{相位交越頻率 } \angle G(j\omega) = \angle \frac{2}{j\omega-3} = - \left( 180^\circ + \text{Tan}^{-1} \frac{\omega}{3} \right) = -180^\circ \Rightarrow \omega = 0$$

$$\text{增益邊界 } GM = 20 \log \left| \frac{1}{\frac{2}{j\omega-3}} \right|_{\omega=0} = 20 \log \frac{3}{2} = 3.52 \text{ dB}$$

$$\text{(三)} G(s) = \frac{\frac{2K}{s+1}}{1 - 2 \times \frac{2K}{s+1}} = \frac{2K}{s+1-4K}$$

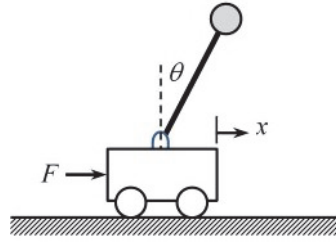
則

$$PM = 135 = 180 - \text{Tan}^{-1} \frac{\omega_g}{1-4K} \Rightarrow \omega_g = 1-4K$$

$$|G(s)| = \frac{2K}{s+1-4K} \Big|_{\omega_g=1-4K} = 1 \Rightarrow \frac{2K}{\sqrt{2} \times (1-4K)} = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{4+\sqrt{2}}$$

公職王歷屆試題 (112 高考三級)

二、下圖為一典型的倒單擺系統，包含台車、支桿、與一個位於支桿頂端的重物。 $F$  是施加於台車的力，倒單擺支桿與垂直地面的夾角為  $\theta$ ，而  $x$  表示台車的位移。



經過簡化後，假設此倒單擺系統的動態方程式可表示成：

$$\begin{aligned} 0.1\ddot{x} - 0.01\ddot{\theta} &= F \\ 0.2\ddot{\theta} - 10\theta &= \ddot{x} \end{aligned}$$

(一) 求解此系統之轉移函數 (transfer function)， $\mathcal{L}\{\theta\}/\mathcal{L}\{F\}$ ，其中  $\mathcal{L}$  代表拉普拉斯轉換 (Laplace transform)。(10 分)

(二) 繪出此系統 (輸入為  $F$ ，輸出為  $\theta$ ) 之波德圖 (Bode plot) 以表示其之頻率響應。波德圖應包含以分貝 (dB) 為單位之增益 (gain) 圖與相位 (phase) 圖兩個部分。(20 分)

1. 《考題難易》(★：非常簡單 / ★★：簡單 / ★★★：普通 / ★★★★：困難 / ★★★★★：非常困難)

★★★

2. 《破題關鍵》：(請老師針對該題目做關鍵字及重要爭點的標註)

瞭解拉氏轉換與波德圖分析

【擬答】

$$\Rightarrow 0.1s^2 X(s) - 0.01s^2 \theta = F(s) \text{-----(1)}$$

$$0.2s^2 \theta - 10\theta = s^2 X(s) \text{-----(2)}$$

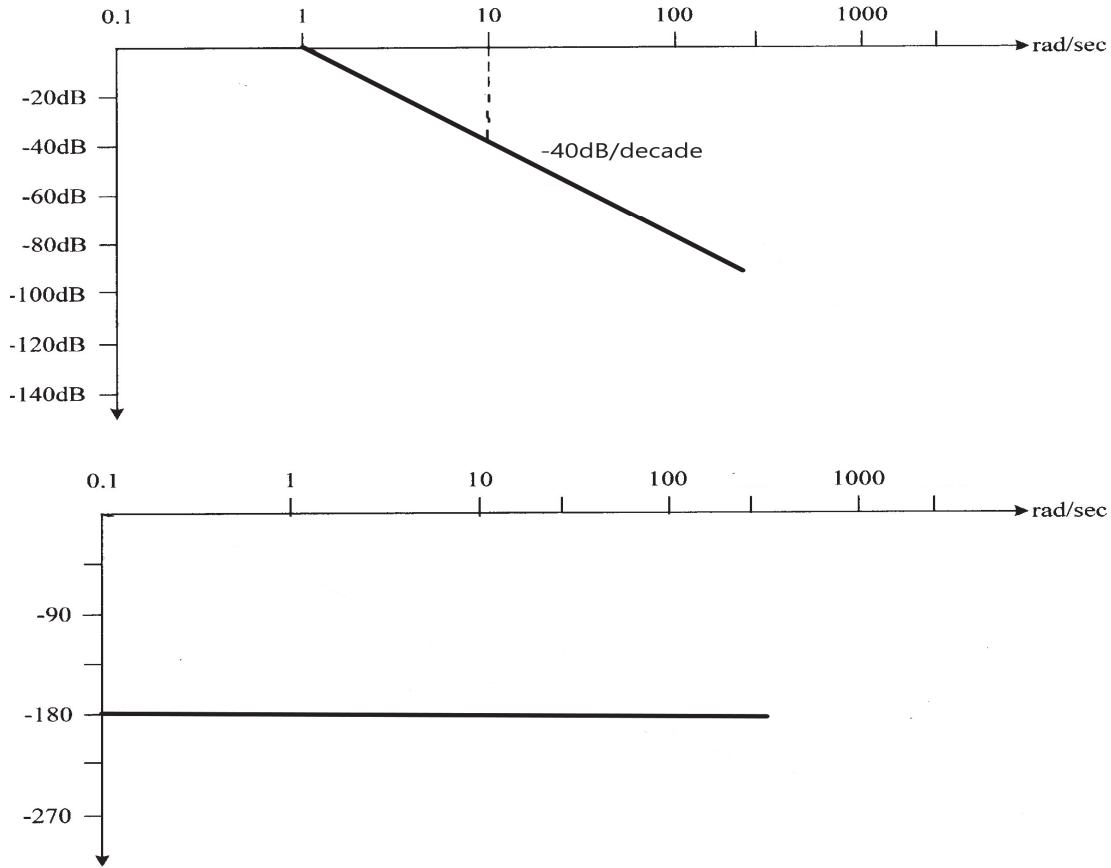
根據(2)式  $X(s) = (0.2 - \frac{10}{s^2})\theta(s)$ ，代入(1)式

$$0.1s^2 \times (0.2 - \frac{10}{s^2})\theta(s) - 0.01s^2 \theta = F(s) \Rightarrow (0.01s^2 - 1)\theta(s) = F(s)$$

$$\therefore \frac{\theta(s)}{F(s)} = \frac{1}{0.01s^2 - 1} = \frac{100}{s^2 - 100}$$

$$\Rightarrow \frac{\theta(s)}{F(s)} = \frac{100}{s^2 - 100} = -\frac{1}{\left(1 + \frac{s}{10}\right)\left(1 - \frac{s}{10}\right)}$$

波德圖如下



職

**志光 保成 學儒 陪你**

## 站上工科巔峰

電力工程

電子工程

機械工程

資訊處理

<b>【全國狀元】</b> 111 高 考 電子工程 洪○銓	<b>【台北市第五】</b> 111 地特三等 電子工程 薛○文
<b>【全國榜眼】</b> 111 普 考 資訊處理 羅○昌	<b>【全國第七】</b> 111 普 考 電子工程 卓○倫
<b>【台北市榜眼】</b> 111 地特三等 電子工程 郭○瑞	<b>【全國第八】</b> 111 高 考 機械工程 江○禾
<b>【台北市榜眼】</b> 111 地特四等 電力工程 張○境	<b>【全國第八】</b> 111 普 考 電力工程 陳○璋
<b>【金門縣榜眼】</b> 111 地特三等 資訊處理 李○杰	<b>【全國第八】</b> 111 普 考 電子工程 李○穎
<b>【台北市探花】</b> 111 地特四等 電子工程 楊○榮	<b>【台北市第八】</b> 111 地特四等 資訊處理 吳○進
<b>【高雄市探花】</b> 111 地特四等 電子工程 何○宇	<b>【全國第九】</b> 111 普 考 機械工程 施○佑
<b>【全國第五】</b> 112 初 等 考 電子工程 陳○豪	

**各類考試優秀考取**

高考電力工程 丁○翔; 高考電力工程 陳○璋; 普考電力工程 梁○豐; 普考機械工程 金○瑋; 高考資訊處理 陳○廷; 普考資訊處理 吳○翰; 普 考 資訊處理 褚○華  
 高考電力工程 王○甯; 高考電力工程 曾○倫; 高考電子工程 王○樞; 高考資訊處理 于 ○; 高考資訊處理 陳○明; 普考資訊處理 李○庭; 普 考 資訊處理 劉○廷  
 高考電力工程 吳○哲; 高考電力工程 葛○宇; 高考電子工程 卓○倫; 高考資訊處理 李○庭; 高考資訊處理 曾○理; 普考資訊處理 張○偉; 普 考 資訊處理 劉○銘  
 高考電力工程 吳○塘; 高考電力工程 蔡○昇; 高考電子工程 莊○雪; 高考資訊處理 胡○紘; 高考資訊處理 黃○迪; 普考資訊處理 張○慧; 普 考 資訊處理 鄭○然  
 高考電力工程 吳○顯; 高考電力工程 蔡○鎮; 普考電子工程 馮○恩; 高考資訊處理 張○偉; 高考資訊處理 廖○中; 普考資訊處理 陳○明; 普 考 資訊處理 賴○全  
 高考電力工程 李○源; 高考電力工程 鄧○駿; 普考電子工程 蔣○霖; 高考資訊處理 許○傑; 高考資訊處理 劉○廷; 普考資訊處理 陳○堂; 地特三等 資訊處理 龍○穎  
 高考電力工程 席○棠; 普考電力工程 吳○哲; 高考機械工程 黃○榮; 高考資訊處理 郭○哲; 高考資訊處理 賴○全; 普考資訊處理 曾○瑄; 初 等 考 電子工程 楊○榮  
 高考電力工程 梁○豐; 普考電力工程 吳○塘; 普考機械工程 江○禾; 高考資訊處理 郭○楷; 高考資訊處理 羅○昌; 普考資訊處理 黃○迪; 初 等 考 電子工程 楊○文

版面有限 無法一一刊登

三、考慮一單位負回授 (unity negative feedback) 閉迴路 (closed-loop) 控制系統，其開迴路

(open-loop) 轉移函數為  $\frac{K(s+4)(s+5)}{s^2-4}$

(一)欲使此閉迴路控制系統穩定之  $K$  值範圍為何？(5 分)

(二)設定  $K$  為正數。繪製此閉迴路控制系統之根軌跡圖 (root locus plot)，並標示出極點 (pole)、零點 (zero)、根軌跡與虛數軸交會之位置、根軌跡離開實數軸的位置

(breakaway point) 與進入實數軸的位置 (re-entry point)，以及各所對應之  $K$  值。(20 分)

(三)如欲使此閉迴路控制系統對於步階輸入之 2% 安定時間 (settling time) 為 2 秒，則  $K$  值該如何設計？且此設計下控制系統的阻尼比 (damping ratio) 應為何？(10 分)

(四)如欲使此閉迴路控制系統對於步階輸入之穩態誤差 (steady state error) 為 -10%，則  $K$  值又該如何設計？(5 分)

1. 《考題難易》(★：非常簡單 / ★★：簡單 / ★★★：普通 / ★★★★：困難 / ★★★★★：非常困難)

★★★

2. 《破題關鍵》：(請老師針對該題目做關鍵字及重要爭點的標註)

瞭解 RH 法則、根軌跡與時域分析方能解題

【擬答】

(一)特性方程式為  $\Delta(s) = (s^2 - 4) + K(s+4)(s+5) = (K+1)s^2 + 9Ks + (20K-4)$

羅斯法則表格如下

$s^2$	$K+1$	$20K-4$
$s^1$	$9K$	$0$
$s^0$	$20K-4$	

$K+1 > 0; K > 0; 20K-4 > 0$

$\therefore K > 0.2$

(二)

1. 極點:  $s = -2, 2, n = 2$

2. 零點:  $s = -4, -5, m = 2$

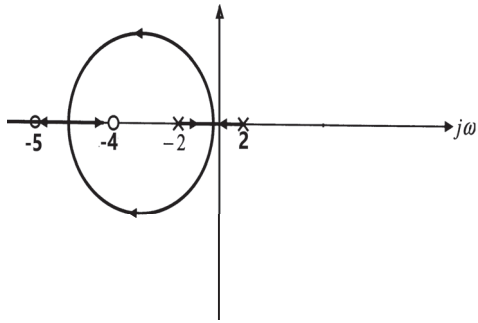
3. 分離點滿足:  $\frac{dG(s)}{ds} = 0 \Rightarrow -9s^2 - 48s - 36 = 0 \therefore 3s^2 + 16s + 12 = 0 \Rightarrow s = -0.9028; s = -4.4305$

4. 根軌跡與虛軸交點:  $s=0$

特性方程式  $\Delta(s) = (s^2 - 4) + K(s+4)(s+5) = (K+1)s^2 + 9Ks + (20K-4)$

將  $K = 0.2$  代入，輔助方程式為 1.  $2s^2 = 0$

5. 根軌跡圖形如下



(三)特性方程式為  $\Delta(s) = (s^2 - 4) + K(s + 4)(s + 5) = (K + 1)s^2 + 9Ks + (20K - 4)$

則  $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 4s + \omega_n^2 = 0$

$(K + 1)s^2 + 9Ks + (20K - 4) = 0 \Rightarrow s^2 + \frac{9K}{K + 1}s + \frac{20K - 4}{K + 1} = 0$

且  $T_s = 2 = \frac{4}{\xi\omega_n} \Rightarrow \xi\omega_n = 2$

所以

$\frac{9K}{K + 1} = 4 \Rightarrow K = \frac{4}{5} \Rightarrow \omega_n^2 = \frac{4(5K - 1)}{K + 1} = \frac{12}{\frac{9}{5}} = \frac{20}{3} \Rightarrow \omega_n = \frac{2\sqrt{15}}{3}$

$\xi\omega_n = 2 \Rightarrow \xi \times \frac{2\sqrt{15}}{3} = 2 \Rightarrow \xi = \frac{3}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{5} = 0.7746$

(四)  $e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G(s)} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)}$

$\therefore \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K(s + 4)(s + 5)}{s^2 - 4}} = \frac{1}{1 - 5K} = -\frac{1}{10} \Rightarrow K = 2.2$



志光 保成 學儒

# 我連過 3 榜!



>>> 跟著老師上課的進度走  
很快地就可以把所有內容讀熟，順利上榜!

<電子學>一開始的基本觀念建立都是跟老師的課開始，將老師提供的筆記多次反覆的來抄寫背誦，基本上就有機會對大部份考題略懂。  
<基本電學>及<電子學>筆記就照著老師板書寫的抄寫下來，熟讀筆記內容，接著就是不停地算題目，課本、題庫班的題目算熟，考試時會用到的觀念基本都在筆記以及題庫班中。

洪○銓

**2 狀元 & 1 榜眼**

111年高考電子工程 全國狀元  
111年鐵路特考高員級電子工程 全國狀元  
109年普考電子工程 全國榜眼、應屆考取