

112 年特種考試地方政府公務人員考試試題

等 別：三等考試

類 科：電力工程、電子工程

科 目：工程數學

吳迪老師解題

甲、申論題部分：(50 分)

一、請求下列微分方程式的解：

$$y'' + 4y = 1 + x + \sin x, y(0) = 0, y'(0) = 0$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}, y' = \frac{dy}{dx} \quad (15 \text{ 分})$$

1. 《考題難易》：★★
2. 《解題關鍵》：考二階微分方程
3. 《命中特區》：吳迪著”工程數學”第二章

【擬答】：

$$\begin{aligned} y'' + 4y &= 1 + x + \sin x \\ L\{y'' + 4y\} &= L\{1 + x + \sin x\} \\ \Rightarrow S^2 Y(S) - Sy(0) - y'(0) + 4Y(S) &= \frac{1}{S} + \frac{1}{S^2} + \frac{1}{S^2 + 1} \\ &= \frac{1}{S} + \frac{1}{S^2} + \frac{1}{S^2 + 1} \\ \Rightarrow (S^2 + 4)Y(S) &= \frac{1}{S} + \frac{1}{S^2} + \frac{1}{S^2 + 1} \\ \Rightarrow Y(S) &= \frac{1}{S(S^2 + 4)} + \frac{1}{S^2(S^2 + 4)} + \frac{1}{(S^2 + 1)(S^2 + 4)} \\ &= \frac{1}{S(S^2 + 4)} + \frac{1}{S^2(S^2 + 4)} + \frac{\frac{1}{3}}{S^2 + 1} + \frac{-\frac{1}{3}}{S^2 + 4} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \times 2}{S(S^2 + 4)} + \frac{\frac{1}{2} \times 2}{S^2(S^2 + 4)} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{S^2 + 1} - \frac{1}{6} \times \frac{2}{S^2 + 4} \\ \Rightarrow y(x) &= L^{-1}\{Y(S)\} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^x \sin 2x \, dx + \frac{1}{2} \int_0^x \int_0^x \sin 2x \, dx \, dx + \frac{1}{3} \sin x - \frac{1}{6} \sin 2x \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x \right) + \frac{1}{3} \sin x - \frac{1}{6} \sin 2x \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{7}{24} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin x \end{aligned}$$

二、設 $A = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$

(一) 求解 A 的特徵值 (eigenvalue) 與對應的特徵向量 (eigenvector)。(4 分)

(二) 求解 A^2 的特徵值與對應的特徵向量。(4 分)

(三) 解 $A^\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ 。(7 分)

1. 《考題難易》：★★
2. 《解題關鍵》：考特徵值與對應的特徵向量
3. 《命中特區》：吳迪著”工程數學”第八章

【擬答】：

(一)

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0.9 - \lambda & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 1.7\lambda + 0.7 = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 0.7) = 0$$

$$\therefore \lambda = 1, 0.7$$

$$1. \lambda = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} -0.1 & 0.1 \\ 0.2 & -0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = K_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$2. \lambda = 0.7 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = K_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

(二) A^2 之特徵值 $\lambda = 1, 0.49$

$$1. \lambda = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = K_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$2. \lambda = 0.49 \Rightarrow \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = K_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$(三) P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P^{-1}AP = D \Rightarrow A = PDP^{-1}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.7 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^\infty & 0 \\ 0 & 0.7^\infty \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

三、請利用留數 (residue) 計算 $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ 。(10 分)

1. 《考題難易》：★★

2. 《解題關鍵》：考留數定理

3. 《命中特區》：吳迪著”工程數學”第十章

【擬答】：

$$f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2} = \frac{1}{(1+z^2)(1+z^2)}$$

$\therefore z = \pm i$ 為二階極點

且 $z = i$ 在上半平面

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\{f(z)\}_{z=i} &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left[(z-i)^2 \frac{1}{(1+z^2)(1+z^2)} \right] = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{(z+i)^2} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{-2}{(z+i)^3} = -\frac{i}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2} &= \int_0^\infty \frac{1}{(1+z^2)^2} dz \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(z^2+1)^2} dz = \frac{1}{2} 2\pi i \times \left(-\frac{i}{4}\right) \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

四、設 X 與 Y 的聯合機率密度函數 (joint probability density function) 是

$$f_{XY}(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}, 0 \leq x < \infty, 0 \leq y < \infty$$

$$= 0, \quad x < 0 \text{ 或 } y < 0$$

其中 $\lambda > 0$ 。設 $Z = X + Y$ 。

(一) 求 Z 的期望值 (mean)。(5 分)

(二) 求 Z 的累積分布函數 (cumulative distribution function)。(5 分)

1. 《考題難易》：★★
2. 《解題關鍵》：考雙變數機率函數的變數變換
3. 《命中特區》：吳迪著“工程數學”第七章

【擬答】：



志光
學儒
保成

站上工科巔峰

電力工程

電子工程

機械工程

電信工程

112高普考&111地方特考 TOP10 強勢上榜

狀元	榜眼	探花
高考 電力工程 許○軒 高考 電子工程 郭○瑞	普考 電力工程 許○軒 地特三等(台北市) 電子工程 郭○瑞 地特四等(台北市) 電力工程 張○境	普考 電力工程 呂○勳 地特四等(台北市) 電子工程 楊○榮 地特四等(高雄市) 電子工程 何○宇

【全國第四】 普考 電力工程 林○彬

【全國第五】 普考 電力工程 莊○鈞

【台北市第五】 地特三等 電子工程 薛○文

【全國第六】 普考 電信工程 朱○萱

【全國第七】 普考 電子工程 王○延

【全國第八】 高考 電力工程 林○彬

【全國第八】 高考 電子工程 黃○源

【全國第八】 普考 電子工程 黃○軒

【全國第十】 高考 機械工程 徐○甫

優秀考取 菁英薈萃

高考 電力工程 孫○勝

高考 電力工程 呂○勳

高考 電力工程 郭○謙

高考 電力工程 林○佑

高考 電力工程 許○騰

高考 電力工程 莊○鈞

高考 電力工程 王○宏

高考 電力工程 陳○文

高考 電力工程 汪○懷

高考 電力工程 蔡○穎

高考 電力工程 羅○璋

普考 電力工程 郭○宗

普考 電力工程 孫○勝

普考 電力工程 蔡○祐

普考 電力工程 蔡○穎

普考 電力工程 王○宏

普考 電力工程 賴○允

普考 電力工程 蔡○翰

普考 電力工程 陳○萱

普考 電力工程 蔡○典

普考 電力工程 周○明

普考 電力工程 許○軒

普考 電力工程 郭○瑞

普考 電力工程 張○境

普考 電力工程 呂○勳

普考 電力工程 楊○榮

普考 電力工程 何○宇

普考 電力工程 林○彬

廢面有限 無法一一刊登

(一)

$$\text{令 } \begin{cases} Z = X + Y \\ U = X \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = u \\ y = z - u \end{cases}$$

$$J \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$f(u, z) = \lambda^2 e^{-\lambda z}, 0 < u < z < \infty$$

$$\Rightarrow f(z) = \int_0^z \lambda^2 e^{-\lambda z} du = \lambda^2 z e^{-\lambda z}, z > 0$$

$$\therefore E(z) = \int_0^\infty z f(z) = \int_0^\infty x^2 z^2 e^{-\lambda z} dz = \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty (\lambda z)^2 e^{-\lambda z} d(\lambda z) = \frac{2}{\lambda}$$

$$(二) F(z) = P(Z \leq z) = \int_0^z \lambda^2 z e^{-\lambda z} dz = 1 - \lambda z e^{-\lambda z} - e^{-\lambda z}, z > 0$$

乙、測驗題部分：(50 分)

(B) 1. 考慮函數 $\phi(x, y, z) = 2x^2y - yz^2$ ，請決定梯度 $\nabla \phi(x, y, z)$ 在點 $(1, -1, 2)$ 之值為何？(A) $-4i + 2j + 8k$ (B) $-4i - 2j + 8k$ (C) $-4i - 2j - 8k$ (D) $-4i + 2j - 8k$ (A) 2. 若 $\cdot$ 為內積運算， $\times$ 為外積運算，請計算 $(2i - j) \cdot [(i + 3j - k) \times (3i - k)]$ 之值為何？(A) -4 (B) -5 (C) -6 (D) -7 (C) 3. 圍線積分 $\oint_c y^2 dx + (xy + x^2) dy$ 其中 c 為由直線 $y = x$ 與拋物線 $y = x^2$ 所圍成的封閉路徑，利用格林定理 (Green's theorem) 將此積分劃成面積分 $\iint_R u(x, y) dy dx = K$ ，其中 R 為封閉路徑 c 所圍的區域，請問 $u(x, y)$ 與 K 分別為何？(A) $u(x, y) = y - 2x, K = \frac{1}{20}$ (B) $u(x, y) = 2x - y, K = \frac{1}{40}$ (C) $u(x, y) = 2x - y, K = \frac{1}{20}$ (D) $u(x, y) = y - 2x, K = \frac{1}{40}$

志光 學儒 保成

工科上榜養成規劃

1 2 3 4 5 6 7 8

- 法科架構班**
結合實務例子
建構法科概念
- 扎實正規班**
完整堂數
循序漸進
- 獨家 進階課程**
圖解階段複習
解題技巧灌輸
- 工科全科班**
公職+國營
一次到位
- 主題題庫班**
主題教學
考點分析
- 精華總複習**
掌握考點
增強實力
- 全真模擬考**
比照真實考試
檢視應考實力
- 考前關懷講座**
名師最終提點
觀念更加清晰

詳細課程內容，歡迎至志光學儒保成全國門市洽詢

- (A) 4. 下列那一個向量不在矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ 之列空間 (row space) ?
- (A) $\begin{bmatrix} 3 & 9 & 14 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 6 & 15 & 24 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$
- (C) 5. 矩陣 $A = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ 經由對角化得 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ，下列何者是 P 的矩陣？
- (A) $P = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ (B) $P = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ (C) $P = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ (D) $P = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$
- (C) 6. 假設矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$ ，計算行列值 $\det(3A^T) + \det(A^{-1}) = \frac{C}{3}$ 。C = ?
- (A) 18 (B) 28 (C) 244 (D) 234
- (D) 7. 假設 A 為 $n \times n$ 矩陣，下列那一個敘述不等效 (equivalent) 於其他敘述？
- (A) A 可被正交對角化 (orthogonally diagonalizable)
 (B) A 為對稱 (symmetric) 矩陣
 (C) 可為 A 找到或建構 n 的正交規範特徵向量 (orthonormal eigenvectors)
 (D) A 的行列式值 $\det A = \pm 1$
- (A) 8. 下列子集合何者為 R^3 的子空間 (subspace) ?
- (A) $\{(a, b, a+2b) \mid a, b \in R\}$ (B) $\{(0, a, a^2) \mid a \in R\}$
 (C) $\{(a+1, a, 0) \mid a \in R\}$ (D) $\{(a, b, 1) \mid a, b \in R\}$
- (D) 9. 定義 $i = \sqrt{-1}$ ，複數 $z = x + iy$ 與其他共軛複數 $\bar{z} = x - iy$ 。下列何者在整個複數平面皆可解析 (analytic) ?
- (A) $f(z) = \bar{z}$ (B) $f(z) = e^y (\cos x + i \sin x)$
 (C) $f(z) = x^2 + y^2 + 2ixy$ (D) $f(z) = e^x (\cos y + i \sin y)$


志光 學儒 保成


獨家 高普考工科進階課程

----- 階梯式課程設計，鞏固考取實力 -----

理論建構 縱向連貫		知識運用 橫向整合	
基礎班	正規課前導讀 快速進入狀況	階段複習課	加強學習連貫 增強邏輯思考
多循環正規班	同考科採多元師資教學 同類科開立多循環課程	申論作答班	名師專業指導 迅速加強實力
考前總複習班	重要章節統整觀念 補充最新時事法條	測驗易點通	精選歷年易錯題目 加強觀念不踩陷阱

歡迎至 志光.學儒.保成 全國門市洽詢



- (B) 10. 定義 $i = \sqrt{-1}$ ，假設方程式 $z^2 - z + 1 + i = 0$ 兩個解為 z_1 與 z_2 且 $|z_1| > |z_2|$ ，則下列何者正確？
 (A) $z_1 + z_2 = 1 + 2i$ (B) $z_1 - z_2 = 1 + 2i$ (C) $|z_1| = 1$ (D) $|z_2| = \sqrt{2}$
- (B) 11. $f(z) = \frac{z(z-5)(z-i)}{(z+i)^3(z+1)(z-4)^2}$ ，且 c 為 $|z| = 3$ 逆時鐘之封閉路徑，請決定 $\oint_c \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ 之值為何？
 (A) $4\pi i$ (B) $-4\pi i$ (C) $6\pi i$ (D) $-6\pi i$
- (D) 12. 請利用複數微積分決定 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}$ 之值為何？
 (A) $\frac{3\pi}{2}$ (B) $\frac{3\pi}{4}$ (C) $\frac{3\pi}{6}$ (D) $\frac{3\pi}{8}$
- (C) 13. 一階常微分方程式 $(Ax^2y^2 + By^3)dx + (2x^3y + 12xy^2 + 5)dy = 0$ 為正和 (exact)，A、B 值為何？
 (A) $A = 2, B = 3$ (B) $A = 3, B = 3$ (C) $A = 3, B = 4$ (D) $A = 4, B = 3$
- (C) 14. 給定微分方程式 $(4-y^2)\frac{dy}{dx} = x^2$ ，當初始值 $(x_0, y(x_0))$ 落在下列那一個 xy 平面區間上，該微分方程式可能不會有唯一解 (unique solution)？
 (A) $x \in \mathbb{R}, -2 < y < 2$ (B) $x \in \mathbb{R}, y < -2$ (C) $x \in \mathbb{R}, y > -2$ (D) $x \in \mathbb{R}, -1 < y < 1$
- (D) 15. 已知週期為 6 的函數 $f(x) = |x|, -3 < x < 3$ ，展開成 $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{3}$ ，下列何者正確？
 (A) $a_1 = \frac{6}{\pi^2}$ (B) $a_3 = \frac{2}{3\pi^2}$ (C) $a_5 = \frac{8}{25\pi^2}$ (D) $a_7 = \frac{12}{49\pi^2}$
- (B) 16. 函數 $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } |x| < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ 之傅立葉轉換 (Fourier transform) 為下列何者？
 (A) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin w}{w}$ (B) $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin w}{w}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\cos w}{w}$ (D) $\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos w}{w}$

志光 學儒 保成

高普考 雙榜學長高分上榜的秘密

工科題庫班

解析 題目觀念

精選易錯題型
加強觀念解析

強化 解題技巧

以題目授課
加強應考實力

增快 答題速度

加強快速審題
增加加分機會



電子學考題的多樣性太過豐富，因此讓我慶幸有**題庫班**的存在。當讀完課程並複習完後初次寫電子學考古題仍舊讓我難以著手，透過**題庫班**的課程整理出各單元的解題方式才稍微能夠下筆。

許O軒 112高考電力工程 全國狀元 | 112普考電力工程 全國榜眼

- (D) 17. 下列那個函數 (t 為獨立變數) 無拉氏轉換 (Laplace transform)？

- (A) $\sqrt{\frac{t}{\pi}}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$ (C) $\frac{\sin t}{t}$ (D) $\frac{1}{t}$

公職王歷屆試題 (112 地方特考)

- (C) 18. 假設 X 為一離散隨機變數 (discrete random variable) 其值為 -2、1 與 3 的機率分別 $P(X = -2) = 0.4$ 、 $P(X = 1) = 0.5$ 與 $P(X = 3) = 0.1$ 。則期望值 $E[2X^2 + 1] = ?$
(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8
- (D) 19. 某間製造公司專門生產發電機，在甲、乙、丙三地各有一間工廠，各工廠產量分別占總產量的 40%(甲)、25%(乙)、35%(丙)，各工廠生產產品的不合格率分別為 3%(甲)、2%(乙)、4(丙)，則整間公司發電機產品的不合格率為？
(A) 2.5% (B) 3.2% (C) 3% (D) 3.1%
- (A) 20. 設 X 、 Y 、及 Z 為三個隨機變數，且聯合機率密度函數為 $f(x, y, z) = \begin{cases} 1, 0 \leq x, y, z \leq 1 \\ 0, \text{其他} \end{cases}$ ，請決定 $X \geq 3Y \geq 5Z$ 的機率為何？
(A) $\frac{1}{40}$ (B) $\frac{3}{40}$ (C) $\frac{5}{40}$ (D) $\frac{7}{40}$

公
職
王