

112 年特種考試地方政府公務人員考試試題

等 別：三等考試

類 科：統計

科 目：統計學

吳迪老師

一、設 X_1 、 X_2 、 X_3 為互相獨立的標準常態隨機變數。令 $Y_1 = (X_1 - X_2) / \sqrt{2}$ ， $Y_2 = (X_1 + X_2 - 2X_3) / \sqrt{6}$ 。

與 $Y_3 = (X_1 + X_2 + X_3) / \sqrt{3}$ 。試求：

(一) Y_1 、 Y_2 、 Y_3 是否分別具有相同的機率密度函數，須完整求出各自的機率密度函數。(15 分)

(二) 求 Y_1 、 Y_2 和 Y_3 之聯合分配函數。(10 分)

1. 《考題難易》★★★

2. 《破題關鍵》：考標準常態分配機率及數及變數的轉換。

【擬答】

$$\text{(一) } 1. (X_1, X_2) \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0,1) \Rightarrow X_1 - X_2 \sim N(0,2)$$

$$\Rightarrow Y_1 = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$$

$$\Rightarrow f(y_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_1^2}{2}}, -\infty < y_1 < \infty$$

$$2. (X_1, X_2, X_3) \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0,1) \Rightarrow X_1 + X_2 - 2X_3 \sim N(0,6)$$

$$\Rightarrow Y_2 = \frac{X_1 + X_2 - 2X_3}{\sqrt{6}} \sim N(0,1)$$

$$\Rightarrow f(y_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_2^2}{2}}, -\infty < y_2 < \infty$$

$$3. (X_1, X_2, X_3) \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0,1) \Rightarrow X_1 + X_2 + X_3 \sim N(0,3)$$

$$\Rightarrow Y_3 = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{\sqrt{3}} \sim N(0,1)$$

$$\Rightarrow f(y_3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_3^2}{2}}, -\infty < y_3 < \infty$$

所以 Y_1, Y_2, Y_3 具有相同的機率密度函數。

(二) X_1, X_2, X_3 獨立

$$\Rightarrow f(X_1, X_2, X_3) = f(X_1)f(X_2)f(X_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{X_1^2}{2}}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{X_2^2}{2}}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{X_3^2}{2}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 e^{-\frac{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}{2}}, \begin{cases} -\infty < X_1 < \infty \\ -\infty < X_2 < \infty \\ -\infty < X_3 < \infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_1 = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}} \\ Y_2 = \frac{X_1 + X_2 - 2X_3}{\sqrt{6}} \\ Y_3 = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}Y_1 + \frac{\sqrt{6}}{6}Y_2 + \frac{\sqrt{3}}{3}Y_3 \\ X_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}Y_3 + \frac{\sqrt{6}}{6}Y_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}Y_1 \\ X_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}Y_3 - \frac{\sqrt{6}}{3}Y_2 \end{cases}$$

$$J = \frac{\partial(X_1, X_2, X_3)}{\partial(Y_1, Y_2, Y_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial Y_1} & \frac{\partial X_1}{\partial Y_2} & \frac{\partial X_1}{\partial Y_3} \\ \frac{\partial X_2}{\partial Y_1} & \frac{\partial X_2}{\partial Y_2} & \frac{\partial X_2}{\partial Y_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial Y_1} & \frac{\partial X_3}{\partial Y_2} & \frac{\partial X_3}{\partial Y_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{vmatrix} = 1$$

$$\therefore f(y_1, y_2, y_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 e^{-\frac{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}{2}}, \begin{cases} -\infty < y_1 < \infty \\ -\infty < y_2 < \infty \\ -\infty < y_3 < \infty \end{cases}$$

二、令 $X_1, \dots, X_n$ 為抽取自 $f(x; \theta) = \theta e^{-\theta x}$, $x > 0$ 隨機樣本。求下列參數的齊一最小變異不偏估計 (Uniformly Min. Variance Unbiased Estimator) :

(一) θ 。(10 分)

(二) $\frac{1}{\theta}$ 。(15 分)

1. 《考題難易》★★★★

2. 《破題關鍵》：考 UMVUE，數理統計，統計類組同學要多加注意。

【擬答】

$$(一) f(X_1, X_2, \dots, X_n | \theta) = (\theta e^{-\theta X_1}) \times \dots \times (\theta e^{-\theta X_n}) = \theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^n X_i} = K(\theta) e^{d(\theta)T(X)}$$

為一維指數族，其中 $T(X) = \sum_{i=1}^n X_i$

$$d(\theta) = -\theta, K(\theta) = \theta^n$$

$\therefore T(X) = \sum_{i=1}^n X_i$ 為 θ 的完備充分統計量，又 $T = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Gamma}(n, \theta)$

$$\Rightarrow E\left(\frac{1}{T}\right) = \int_0^\infty \frac{1}{t} f(t) dt = \int_0^\infty \frac{1}{t} \times \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-\theta t} dt = \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty t^{n-2} e^{-\theta t} dt$$

$$= \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} \times \frac{1}{\theta^{n-1}} \times \Gamma(n-1) = \frac{\theta}{n-1}$$

$$\Rightarrow E\left(\frac{n-1}{T}\right) = \theta \Rightarrow E\left(\frac{n-1}{\sum_{i=1}^n X_i}\right) = \theta$$

由 Lehman - Scheffe 定理 $\frac{n-1}{\sum_{i=1}^n X_i}$ 為 θ 的 UMVUE

$$(\text{二}) E(\bar{X}) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right) = \frac{\sum_{i=1}^n E(X_i)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\theta}}{n} = \frac{\frac{n}{\theta}}{n} = \frac{1}{\theta}$$

$\therefore \bar{X}$ 為 $\frac{1}{\theta}$ 的不偏估計式。

由 (一) $\sum_{i=1}^n X_i$ 為 θ 的完備充分統計量。 $\Rightarrow \bar{X}$ 也為 θ 的完備充分統計量。

由 Lehman - Scheffe 定理， $\bar{X}$ 為 $\frac{1}{\theta}$ 的 UMVUE

三、某公司須從三種退休計畫方案選擇一種方案。該公司想研究的問題為：喜愛那一種方案的員工與其工作性質有無關係？經調查得結果如下表所列，令 p_{ij} 為第 i 種方案受第 j 類員工喜愛的母體比例， $i=1, 2, 3, j=1, 2, 3, 4$ 。

	觀察個數			
	方案1	方案2	方案3	總和
第1類員工	160	30	10	200
第2類員工	140	40	20	200
第3類員工	80	10	10	100
第4類員工	70	20	10	100
合計	450	100	50	600

(一) 試以 p_{ij} 陳述虛無與對立假設 (H_0 和 H_1)。(8 分)

(二) 試執行本題的檢定 (含檢定統計量、棄卻域及結論)，令顯著水準 $\alpha=0.05$ 。(17 分)

$$\chi_{0.05,8}^2 = 15.51, \chi_{0.05,6}^2 = 12.5916, \chi_{0.05,4}^2 = 9.4877$$

$$\chi_{0.025,8}^2 = 17.5346, \chi_{0.025,6}^2 = 14.4494, \chi_{0.025,4}^2 = 11.1433$$

志光 學儒 保成 快速考取 WinWay

全方位 智能學習系統

虛實整合 引你入勝

POINT 上課方式最多元

多元學習新型態 突破傳統上課模式 學習不受環境影響

面授學習 直播學習 在家學習 視訊學習 WiFi學習

· 學習零時差 | 同類科各班別，皆可同步直播上課
· 服務零死角 | 服務緊貼需求，隨時掌握學習狀況

POINT 考試關鍵不漏接

考試關鍵不漏接 考前、考中及考後皆可享有志光 學儒 保成 專業服務

考前叮嚀影片 考前重點下載

線上即時解答 考後影音解題

依各區規劃為主，請洽全國門市

1. 《考題難易》★★

2. 《破題關鍵》：考無母數統計的卡方檢定，基本題。

【擬答】

$$(-) \begin{cases} H_0 : P_{1j} = P_{2j} = P_{3j}, j = 1, 2, 3, 4 \\ H_1 : P_{ij} \text{ 不全相同}, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

(二)

	方案1	方案2	方案3	總和
第1類員工	160(150)	30(33)	10(17)	200
第2類員工	140(150)	40(33)	20(17)	200
第3類員工	80(75)	10(17)	10(8)	100
第4類員工	70(75)	20(17)	10(8)	100
合 計	450	100	50	600

$$\text{其中 } e_{ij} = \frac{\text{第 } i \text{ 列和} \times \text{第 } j \text{ 行和}}{\text{總和}}$$

$$\alpha = 0.05$$

$$\text{拒絕域 } C = \{X^2 | X^2 > X_{0.05}^2(6) = 12.5916\}$$

檢定統計量

$$\begin{aligned} X^2 &= \sum \sum \frac{(O_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}} \\ &= \frac{(160 - 150)^2}{150} + \frac{(30 - 33)^2}{33} + \dots + \frac{(10 - 8)^2}{8} \\ &= 11.5811 \notin C \Rightarrow \text{not ReHo} \end{aligned}$$

結論：沒有證據顯示喜愛哪一種方案的員工與其工作性質有關。

四、一家消費者雜誌想要比較三個不同品牌的手電筒電池的壽命。該雜誌對三個不同品牌的電池抽取獨立隨機樣本，得出以下使用壽命（以小時為單位）。

Brand A	Brand B	Brand C
38	32	24
36	27	25
31	28	29
42		26
29		

(-) 檢定此三個品牌的手電筒電池的平均壽命是否有差異？須列出虛無與對立假設、建構變方分析表（ANOVA table）、棄卻域和結論。（令顯著水準 $\alpha = 0.05$ ）（10 分）

$$f_{0.05,3,9} = 3.8625, f_{0.05,3,10} = 3.7083, f_{0.05,3,11} = 3.5874$$

$$f_{0.05,2,9} = 4.2565, f_{0.05,2,10} = 4.1028, f_{0.05,2,11} = 3.9823$$

公職王歷屆試題 (112 地方政府特考)

(二)試以顯著水準 $\alpha=0.05$ ，執行 Tukey 的多重全距檢定 (Tukey's multiple range test)，比較三個不同品牌的手電筒電池的平均壽命。須列出 Tukey 多重全距檢定的信賴區間公式，計算三對平均差之 Tukey 全距信賴區間，最後做結論。(15 分)

$$q_{0.05,2,12} = 3.08, q_{0.05,2,11} = 3.11, q_{0.05,2,10} = 3.15, q_{0.05,2,9} = 3.20$$

$$q_{0.05,3,12} = 3.77, q_{0.05,3,11} = 3.82, q_{0.05,3,10} = 3.88, q_{0.05,3,9} = 3.95$$

1.《考題難易》★★

2.《破題關鍵》：考單因子變異數分析及多重比較法，常考題。

【擬答】

(一)

	A	B	C	
	38	32	24	
	36	27	25	
	31	28	29	
	42		26	
	29			
和	176	87	104	367
	T_1	T_2	T_3	$T_{..}$

$$n_1 = 5, n_2 = 3, n_3 = 4, N = 12, \sum \sum X_{ij}^2 = 38^2 + 36^2 + \dots + 26^2 = 11562$$

$$SST = SSTR + SSE$$

$$1. SST = \sum \sum X_{ij}^2 - \frac{T_{..}^2}{N} = 11562 - \frac{367^2}{12} = 337.92$$

$$2. SSTR = \sum \frac{T_i^2}{n_i} - \frac{T_{..}^2}{N} = \left(\frac{176^2}{5} + \frac{87^2}{3} + \frac{104^2}{4} \right) - \frac{367^2}{12} = 198.12$$

$$3. SSE = SST - SSTR = 139.8$$

ANOVA 表

來源	SS	DF	MS	F 值
組間	198.12	2	99.06	F=6.379
組內	139.8	9	15.53	
總變異	337.92	11		

$$\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \\ H_1: \mu_i \text{ 不全相同, } i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$\alpha = 0.05$$

$$\text{拒絕域 } C = \{F | F > F_{0.05}(2, 9) = 4.2565\}$$

$$F = 6.379 \in C \Rightarrow \text{ReHo}$$

結論：有證據顯示三個品牌的手電筒電池平均壽命有差異。

$$(二) \bar{X}_1 = \frac{176}{5} = 35.2$$

$$\bar{X}_2 = \frac{87}{3} = 29$$

$$\bar{X}_3 = \frac{104}{4} = 26$$

$$\text{臨界全距 } \omega = \frac{1}{\sqrt{2}} q_{\alpha}(K, N - K) \sqrt{\frac{\text{MSE}}{n_1} + \frac{\text{MSE}}{n_j}}$$

$$1. \mu_1 - \mu_2$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 3.95 \sqrt{\frac{15.53}{5} + \frac{15.53}{3}} = 8.04$$

$$|\bar{X}_1 - \bar{X}_2| = |35.2 - 29| = 6.2 < 8.04$$

$$\text{即 } \mu_1 = \mu_2$$

$$2. \mu_1 - \mu_3$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 3.95 \sqrt{\frac{15.53}{5} + \frac{15.53}{4}} = 7.38$$

$$|\bar{X}_1 - \bar{X}_3| = |35.2 - 26| = 9.2 > 7.38$$

$$\text{即 } \mu_1 \neq \mu_3$$

$$3. \mu_2 - \mu_3$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 3.95 \sqrt{\frac{15.53}{3} + \frac{15.53}{4}} = 8.41$$

$$|\bar{X}_2 - \bar{X}_3| = |29 - 26| = 3 < 8.41$$

$$\text{即 } \mu_2 = \mu_3$$

結論：品牌 A 與品牌 C 手電筒電池平均壽命有差異。而品牌 A、B 與品牌 B、C 之間電池平均壽命無差異。