

# 112 年特種考試地方政府公務人員考試試題

等 別：三等考試

類 科：統計

科 目：抽樣方法

王瑋老師

甲、申論題部分：

本試題可能使用之標準常態值如下： $Z_{0.025}=1.96$ ， $Z_{0.05}=1.645$  計算題的答案要求：

1. 平均數取兩位小數（算到第三位小數然後四捨五入）。
2. 次數或個數的答案取整數（算到第一位小數然後四捨五入）。
3. 變異數取三位小數（算到第四位小數然後四捨五入）。

一、某一民調公司在 12 月 1 日針對 1,200 位 20 歲以上民眾進行訪問，並發布其民意調查結果：甲候選人為 38% 支持度，乙候選人為 34% 支持度，尚未決定為 28%。請求出甲候選人和乙候選人支持度之間差異的 95% 信賴區間。（10 分）。

### 【解題關鍵】

1. 《考題難易》：★☆☆☆☆
2. 《破題關鍵》：本題屬簡單隨機抽樣相依母體的比例值問題，屬課內基本題，109 年高考、106 年高考與 105 年關務皆有有類似考題，可參考王瑋 抽樣方法 P.2-61 至 P.2-64 頁完全相同的試題演練。
3. 《命中特區》：王瑋，抽樣方法，志光出版，頁 2-63 題 39、頁 2-65 題 40、頁 2-67 題 41、與頁 2-66 題 42。

### 【擬答】

設甲候選人支持率為  $P_1$ ，甲候選人支持率為  $P_2$

$$p_1 = 0.38, p_2 = 0.34$$

支持度差異  $P_1 - P_2$  的 95% 之信賴區間

$$(p_1 - p_2) \pm Z \cdot \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n} + \frac{p_2(1-p_2)}{n} + 2 \frac{p_1 p_2}{n}}$$
$$\Rightarrow (0.38 - 0.34) \pm 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.38 \times 0.62}{1200} + \frac{0.34 \times 0.66}{1200} + 2 \frac{0.38 \times 0.34}{1200}}$$

$$\Rightarrow (-0.008, 0.088)$$

此區間包含 0，所以甲乙候選人的支持度沒有顯著差異。

二、將母體按照某一標準分成  $N$  個集群 ( $m_i$  為集群  $i$  中的元素個數， $M = \sum_{i=1}^N m_i$ )，再由這

$N$  個集群中用簡單隨機抽樣法抽出  $n$  個集群，被抽中的集群中的每一個元素均被調查。假設  $y_i$  為第  $i$  個集群中所有觀測值的總和，欲估計母體的總和。母體總和  $\tau$  的估計量有：

$$\text{比率估計量(1): } \hat{\tau} = M \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

$$\text{不偏估計量(2): } \hat{\tau} = \frac{N}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

或是由這  $N$  個集群中用 pps (sampling with probabilities proportional to size) 抽出  $n$  個集群，

## 公職王歷屆試題 (112 地方特考)

被抽中的集群中的每一個元素均被調查。則母體總和  $\tau$  的估計量：

$$\text{pps 不偏估計量(3): } \hat{\tau}_{pps} = \frac{N}{n} \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{m_i}$$

請說明此三估計量之使用時機。(15 分)

### 【解題關鍵】

1. 《考題難易》：★★☆☆☆
2. 《破題關鍵》：三種主要群集抽樣法下估計量的比較，在課堂中一再強調計算題的適用時機，108 年高考曾經考過三種估計量的變異數比較。但實務上的使用時機在過去是未曾考過的，事實上多個年度都有個別的解釋題，有效地整合為本題的答案即可。
3. 《命中特區》：王瑋，抽樣方法，志光出版，頁 5-2 與頁 12-12 題 1~題 2。

### 【擬答】

- (一)若  $N$  個集群每一群集所含單位數是大致相等，不偏估計量是以簡單隨機抽樣法取出數個群集為抽樣單位，被抽中的群集及其樣本為一群集樣本。這樣作法的時機可能是母體群集底冊有所缺失，在成本的考量下，採用不偏估計法的程序簡易，而且估計值為不偏估計量。
- (二)群集抽樣採用比值估計量最主要的目的，是將各個群集的母體大小視為輔助變數，用以增加估計母體總和的準確度。使用時機必須建構在各群集的元素個數  $m_i$  已知，且整體元素總數  $M$  亦已知，才能藉此提升估計母體總和值得精確度。
- (三)若每一群集的大小差異很大時，各個群集單位對母體參數所提供的輔助訊息就可能不一樣，若採均等機率方式抽樣便會影響估計的準確度，此時需採用 pps 不偏估計量，其作法就是將各個抽樣單位被抽中的機率與其大小成正比，但需留意的是此作法是採用抽出放回的方式執行。
- 三、某公司在臺灣一共有 100 個廠區，因最近疫情關係供貨吃緊，總經理想要估計所有 100 個廠區員工未來一年請病假的總天數。100 個廠區可細分為 70 家小廠及 30 家大廠。從過去經驗，小廠員工請假天數約在 0~100 天病假，大廠員工請假天數約在 10~210 天病假，估計誤差界限設為 500 天。請找出可達到這個界限的適當樣本大小及各層配置樣本大小。(15 分)

### 【解題關鍵】

1. 《考題難易》：★☆☆☆☆
2. 《破題關鍵》：分層隨機抽樣與樣本數適配置是考試重要內容，本題考了較少見的總和值的樣本數問題，並且如同 103 年關務給了全距，可利用四分之一的全距作為標準差的估計量。
3. 《命中特區》：王瑋，抽樣方法，志光出版，頁 3-91 題 42。

### 【擬答】

$$\text{採用紐曼配置下，分層抽樣母體總和值之樣本數 } n = \frac{\left( \sum_{h=1}^L N_h S_h \right)^2}{\frac{B^2}{Z^2} + \sum_{h=1}^L N_h S_h^2}$$

其中標準差以全距的 1/4 估計之。

$$\sum_{h=1}^L N_h S_h = 70 \times \frac{100-0}{4} + 30 \times \frac{210-10}{4} = 3250$$

$$\sum_{h=1}^L N_h S_h^2 = 70 \times \left( \frac{100-0}{4} \right)^2 + 30 \cdot \left( \frac{210-10}{4} \right)^2 = 118750$$

$$\text{總樣本數 } n = \frac{3250^2}{500^2 / 1.96^2 + 118750} = 57.46, n \text{ 取 } 58$$

$$\text{紐曼配置下, 各層樣本數為 } n_h = \frac{N_h S_h}{\sum_{h=1}^L N_h S_h} \times n$$

$$\text{小廠員工抽出 } n_1 = \frac{70 \times 25}{3250} \times 58 = 31.23, n_1 \text{ 取 } 31$$

$$\text{大廠員工抽出 } n_2 = \frac{30 \times 50}{3250} \times 58 = 26.77, n_2 \text{ 取 } 27$$

四、表一為臺灣 60 大城市之 11 月份降雨量 (單位: 公厘 mm)。城市 1 至城市 60 排列方式是依地理位置從北到南依序排列。城市號碼愈小所在位置也就愈偏臺灣北部, 城市號碼愈大所在位置也就愈偏臺灣南部。

- (一) 假設用簡單隨機抽樣法抽出  $n = 10$  個臺灣大城市 (10 個樣本的號碼如下: 2、12、16、20、24、27、32、40、47、56), 試估計臺灣 60 大城市之 11 月份平均降雨量 ( $\hat{\mu}$ ) 及其估計變異數 ( $\hat{V}(\hat{\mu})$ )? (10 分)
- (二) 選擇一組 10 個樣本的系統樣本, 為統一起見, 一律採用起始號碼 3。試以此組系統樣本估計臺灣 60 大城市之 11 月份平均降雨量 ( $\hat{\mu}$ ) 及其估計變異數 ( $\hat{V}(\hat{\mu})$ )? 假設母體為隨機排列。(10 分)
- (三) 如果採重複系統抽樣, 抽出兩個 "12 取 1" 的系統樣本, 為統一起見, 一律採用起始號碼 1 及 6。試以此兩組重複系統樣本估計臺灣 60 大城市之 11 月份平均降雨量 ( $\hat{\mu}$ ) 及其估計變異數 ( $\hat{V}(\hat{\mu})$ )? (15 分)

表一 臺灣 60 大城市之 11 月份降雨量

單位：mm

城市	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
降雨量	4.9	4.7	4.8	4.4	4.7	4.8	3.7	3.6	4.5	3.0
城市	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
降雨量	4.2	3.5	3.9	3.0	4.3	3.4	3.5	3.6	2.9	4.8
城市	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
降雨量	4.2	7.4	2.9	3.4	1.8	2.2	2.9	1.2	1.5	2.7
城市	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
降雨量	2.9	1.8	2.7	2.0	2.6	1.1	3.2	1.8	2.6	4.5
城市	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
降雨量	2.7	2.4	1.9	0.8	2.1	0.6	0.6	0.6	1.7	1.3
城市	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
降雨量	1.4	0.7	0.5	1.0	0.3	0.8	0.5	0.3	0.7	0.5

## 【解題關鍵】

- 《考題難易》：★★★★☆
- 《破題關鍵》：近年系統抽樣的考題已陸續出現讓考生自己抽出隨機樣本，如 107 年地特與 104 年高考，但還未曾考過重複系統抽樣的題型，通常是題目直接提供各系統的平均值，如 109 年高考與 103 年關務，所以本題有一定的鑑別度，雖然簡單隨機抽樣與系統隨機抽樣非常容易，但重複系統需要觀念足夠正確，本題相當經典，未來有高機率再命題的機會。
- 《命中特區》：王瑋，抽樣方法，志光出版，頁 7-24 題 13~題 16、頁 7-33 題 19~題 21。

## 【擬答】

(一)採用簡單隨機抽樣所抽到的樣本如下：

城市	2	12	16	20	24	27	32	40	47	56
降雨量	4.7	3.5	3.4	4.8	3.4	2.9	1.8	4.5	0.6	0.8

$$\hat{\mu} = \bar{y} = \frac{4.7 + 3.5 + \dots + 0.8}{10} = 3.04$$

$$s^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n-1} = 2.3316$$

$$\hat{V}(\hat{\mu}) = (1-f) \frac{s_y^2}{n} = (1 - \frac{10}{60}) \frac{2.3316}{10} = 0.194$$

(二)採用每個 6 個選 1 個的系統隨機抽樣，起始號碼為 3 的樣本如下：

城市	3	9	15	21	27	33	39	45	51	57
降雨量	4.8	4.5	4.3	4.2	2.9	2.7	2.6	2.1	1.4	0.5

$$\hat{\mu} = \bar{y}_{sy} = \frac{4.8 + 4.5 + \dots + 0.5}{10} = 3$$

$$s^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n-1} = 2.0556$$

$$\hat{V}(\hat{\mu}) = (1-f) \frac{s_y^2}{n} = \left(1 - \frac{10}{60}\right) \frac{2.0556}{10} = 0.171$$

(三)採用 12 個選 1 個的重複系統抽樣，起始號碼為 1 的樣本如下：

城市	1	13	25	37	49	$\bar{y}_1$
降雨量	4.9	3.9	1.8	3.2	1.7	3.1

採用 12 個選 1 個的重複系統抽樣，起始號碼為 6 的樣本如下：

城市	6	18	30	42	54	$\bar{y}_2$
降雨量	4.8	3.6	2.7	2.4	1.0	2.9

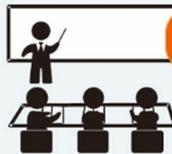
$$\hat{\mu} = \bar{y}_{rsy} = \frac{1}{n_s} \sum_{i=1}^{n_s} \bar{y}_i = \frac{1}{2} (3.1 + 2.9) = 3$$

$$s_r^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_s} (\bar{y}_i - \bar{y}_{rsy})^2}{n_s - 1} = \frac{(3.1 - 3)^2 + (2.9 - 3)^2}{2 - 1} = 0.02$$

$$\hat{V}(\hat{\mu}) = (1-f) \frac{s_r^2}{n_s} = \left(1 - \frac{10}{60}\right) \frac{0.02}{2} = 0.008$$

志光 學儒 保成 多元學習

## 五大學習方式上課超便利



### 現場面授

名師現場面對面  
即時互動解答疑惑



### 直播教學

即時登入直播跟課  
掌握進度免等待



### 視訊課程

手機APP預約上課  
輔導期間 無限重覆看課



### WIFI看課

專屬WIFI教室  
讓你學習時間更彈性



### 在家學習

使用在家補課點數  
即可在家複習上課  
(以老師授權科目為主)

公職王歷屆試題 (112 地方特考)

五、針對新移民做的一項抽樣調查，想獲得他們對於臺灣移民政策的看法。從政府的登記資料知道新移民中有 60% 的女性與 40% 的男性。一共抽樣 1,000 人，有 87% (870 位) 是女性，13% (130 位) 是男性。在 870 位回答的女性中有 566 位贊成，在 130 位回答的男性中有 102 位贊成。由此事後分層，請估計新移民贊成此移民政策的比例 ( $\hat{p}_{st}$ ) 及其估計的變異數 ( $\hat{V}_p(\hat{p}_{st})$ )。(10 分)

【解題關鍵】

《考題難易》：★☆☆☆☆

《解題關鍵》：本題直接明示為事後分層抽樣方法，所以沒有誤解題意的問題，近年事後分層出題率不少，如 110 高考與 108 年薦任皆有命題。

《命中特區》：王瑋，抽樣方法，志光出版，頁 3-44 題 22、頁 3-47 題 24 與頁 3-49 題 25

【擬答】

$$\begin{aligned} \hat{p}_{st} &= \sum_{h=1}^2 A_h p_h = 0.6 \times \frac{566}{870} + 0.4 \times \frac{102}{130} = 0.70 \\ \hat{V}_p(\hat{p}_{st}) &= \left( \frac{N-n}{Nn} \right) \sum_{i=1}^L A_h \cdot s_h^2 + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^L (1-A_h) \cdot s_h^2 \\ &\approx \left( \frac{1}{n} \right) \sum_{i=1}^L A_h \cdot \frac{n_h p_h q_h}{n_h - 1} + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^L (1-A_h) \cdot \frac{n_h p_h q_h}{n_h - 1} \\ &= \frac{1}{1000} \left( 0.6 \times \frac{870 \times \frac{566}{870} \times \frac{304}{870}}{869} + 0.4 \times \frac{130 \times \frac{102}{130} \times \frac{28}{130}}{129} \right) \\ &\quad + \frac{1}{1000^2} \left( 0.4 \times \frac{870 \times \frac{566}{870} \times \frac{304}{870}}{869} + 0.6 \times \frac{130 \times \frac{102}{130} \times \frac{28}{130}}{129} \right) \\ &= \frac{0.204675}{1000} + \frac{0.193218}{1000^2} = 0.0002 \end{aligned}$$

志光 學儒 保成 做你的學習靠山

**快速考取班** 掌握考取節奏 安心學習無負擔

**公職輔考第一品牌 只給你最好的**

<b>學費省很大</b> 全年課程不間斷，一次繳清學費輔導至考取	<b>課程最完整</b> 完整課程循環，基礎班→正規班→專課→總複習...等	<b>上榜賺獎金</b> 報名考取班第一年考取同職等考試，頒發獎學金	<b>加選最超值</b> 輔導期間加選其它科目增加考試機會，另享專案優惠	<b>公約有保障</b> 考取班簽訂公約，保障您的權利與義務至考取為止
-------------------------------------	---	---------------------------------------	---	--

**雙料金榜** 112 高考會計 112 普考會計

**杜○軒 考取班 一年考取**  
當初報考考取班是考量制度的彈性：中間可以無條件保留學籍一年。在課程中，老師提供很多題目，包括選擇題、申論題，唯有透過練習，方能增進速度並顧及試題中所有的眉眉角角，還有活化頭腦之附帶助益。感謝各科老師的教導，讓我能一年內順利上榜。

依各區規劃為主，請洽全國門市

六、請比較簡單隨機估計、比率簡單估計、差異估計、迴歸估計的相對有效性。(15分)

《考題難易》：★★☆☆☆

《解題關鍵》：簡單隨機抽樣、比率估計與迴歸估計的相對有效度比較是強調的考題，如 104 年高考試題。本題雖然多出了差異估計量一起進行相對有效性的比較，但推導的程序類似，在考場中只要順著前面的推導方式，應可順利完成。

《命中特區》：王瑋，抽樣方法，志光出版，頁 9-22 題 7。

【擬答】

簡單隨機估計平均之變異數為

$$Var(\bar{y}) = (1-f) \frac{S_y^2}{n}$$

比率簡單估計平均數之變異數為

$$Var(\bar{y}_r) = (1-f) \frac{S_y^2 - 2R\rho S_x S_y + R^2 S_x^2}{n}$$

差異估計平均數之變異數為

$$Var(\bar{y}_d) = (1-f) \frac{S_y^2 - 2\rho S_x S_y + S_x^2}{n}$$

迴歸估計平均數之變異數為

$$Var(\bar{y}_{lr}) = (1-f) \frac{S_y^2(1-\rho^2)}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{Var(\bar{y})}{Var(\bar{y}_{lr})} = \frac{S_y^2}{S_y^2(1-\rho^2)} = \frac{1}{(1-\rho^2)} \geq 1$$

所以迴歸估計優於簡單隨機估計

$$\Rightarrow \frac{Var(\bar{y}_r)}{Var(\bar{y}_{lr})} = \frac{S_y^2 - 2R\rho S_x S_y + R^2 S_x^2}{S_y^2(1-\rho^2)}$$

$$1 - 2 \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} \frac{S_x}{S_y} \rho + \frac{\bar{Y}^2}{\bar{X}^2} \frac{S_x^2}{S_y^2} = 1 - 2 \frac{CV_x}{CV_y} \rho + \frac{CV_x^2}{CV_y^2}$$

$$= \frac{(1 - \rho^2)}{(1 - \rho^2)} = \frac{(1 - \rho^2)}{(1 - \rho^2)}$$

$$= \frac{(\frac{CV_x^2}{CV_y^2} - \rho)^2 + 1 - \rho^2}{(1 - \rho^2)} = 1 + \frac{(\frac{CV_x^2}{CV_y^2} - \rho)^2}{(1 - \rho^2)} \geq 1$$

所以迴歸估計優於比率估計

$$(\Rightarrow) \frac{Var(\bar{y}_d)}{Var(\bar{y}_{lr})} = \frac{S_y^2 - 2\rho S_x S_y + S_x^2}{S_y^2(1 - \rho^2)}$$

$$= \frac{1 - 2\rho \frac{S_x}{S_y} + \frac{S_x^2}{S_y^2}}{(1 - \rho^2)} = \frac{(\frac{S_x}{S_y} - \rho)^2 + 1 - \rho^2}{(1 - \rho^2)}$$

$$= 1 + \frac{(\frac{S_x}{S_y} - \rho)^2}{(1 - \rho^2)} \geq 1$$

所以迴歸估計優於差異估計

由(一)(二)(三)，迴歸估計是相對最有效的估計量

感謝

志光 學儒 保成

# 讓我們 高分考取



全國  
狀元

經建行政  
高考 劉○岑

全國  
狀元

金融保險  
高考 林○青

全國  
狀元

財經廉政  
高考 林○衡

全國  
狀元

經建行政  
普考 王○懿

全國  
榜眼

統計  
普考 游○翔

全國  
榜眼

經建行政  
普考 劉○岑

全國  
探花

統計  
普考 陳○凱

全國  
探花

財經廉政  
普考 林○衡

榮耀上榜！真正每3人即有2人來自本系列

三等統	計金門縣	錄取率100%	四等財稅行政台中市	錄取率100%	四等統	計竹苗區	錄取率100%	五等經建行政基宜區	錄取率100%
三等經建行政彰投區	錄取率100%	四等財稅行政雲嘉區	錄取率100%	四等經建行政彰投區	錄取率100%	三等商業行政台北市	錄取率100%		
三等經建行政屏東縣	錄取率100%	四等會	計屏東縣	錄取率100%	四等經建行政台南市	錄取率100%	三等財稅行政竹苗區	錄取率100%	
三等經建行政金門縣	錄取率100%	四等會	計連江縣	錄取率100%	五等財稅行政竹苗區	錄取率100%	四等財稅行政高雄市	錄取率100%	
四等財稅行政台中市	錄取率100%	四等會	計澎湖縣	錄取率100%	五等財稅行政花東區	錄取率100%	四等經建行政花東區	錄取率100%	
四等財稅行政雲嘉區	錄取率100%								

KEEP FOR YOU