# 112 年特種考試地方政府公務人員考試試題

等　　別：三等考試
類　　科：土木工程
科　　目：平面測量與施工測量

一、水準儀有那些主軸及各軸間關係為何？試繪圖說明之。（25 分）

【擬答】

水準儀的主軸及各軸間關係

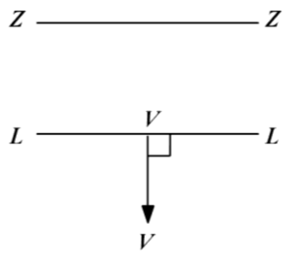
㈠水準儀的主軸：視準軸 (ZZ 軸)、水準軸 (LL 軸)、直立軸(VV 軸)。

*1.* 視準軸：望遠鏡中，物鏡中心與十字絲中心之連線。

*2.* 水準軸：切於水準管刻劃中點之直線，亦稱水準管軸

*3.* 直立軸：儀器水平旋轉的中心軸，亦稱垂直軸。測量時應與重力線重合。

㈡三個主軸之相互關係：如右圖




*1.* 水準軸應垂直於直立軸。如不垂直，則存在水準軸誤差。

*2.* 視準軸應平行於水準軸。如不平行，則存在視準軸誤差。

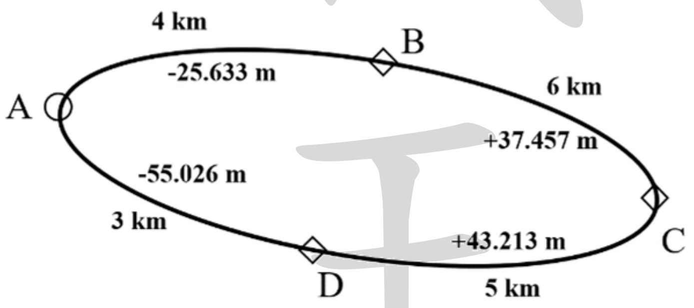
若無法保持上述之關係，則須校正儀器。

㈢水準儀之校正項目

*1.* 水準軸應垂直於直立軸：半半改正法。

*2.* 視準軸應平行於水準軸：定樁法。

二、如圖四個水準點 A、B、C、D，由 A 點開始施測水準測量，點與點間之高程差分別為-25.633 m、+37.457 m、+43.213 m 及-55.026 m，點與點間之距離為 4.0 km、6.0 km、5.0 km 及 3.0 km，A 點高程為 534.596 m，請計算平差後的各點高程。（20 分）




【擬答】

㈠方法一：簡易平差

*1.* 計算閉合差 $\omega$

閉合差 $\omega=[\Delta h]=(-25.633)+37.457+43.213+(-55.026)=0.011m$

水準路線總長度 $K=3+4+5+6=18\ km$

*2.* 計算各邊高程差改正值 $\delta_{i-j}$

∵ 誤差與路線長成正比　　∴改正值 $\delta$ 與路線長成正比

$\delta_{A\text{-}B}=(-0.011)*4/18=-0.0024$，$\delta_{B\text{-}C}=(-0.011)*6/18=-0.0037$，

$\delta_{C\text{-}D}=(-0.011)*5/18=-0.0031$，$\delta_{D\text{-}A}=(-0.011)*3/18=-0.0018$，

*3.* 計算 A,B,C,D 點高程：$H_A=534.596m$

$H_B=H_A+\Delta h_{AB}+\delta_{A\text{-}B}=534.596+(-25.633)+(-0.0024)=508.9606m$

$H_C=H_B+\Delta h_{BC}+\delta_{B\text{-}C}=508.9606+37.457+(-0.0037)=546.4139m$

$H_D=H_C+\Delta h_{CD}+\delta_{C\text{-}D}=546.4139+43.213+(-0.0031)=589.6238m$

$H_A=H_D+\Delta h_{DA}+\delta_{D\text{-}A}=589.6238+(-55.026)+(-0.0018)=534.596m$ Check OK

∴ $H_A$=534.596m，$H_B$= 508.961m，$H_C$=546.414m，$H_D$=589.624m

㈡方法二：間接觀測平差

已知：水準路線長 $L_1$=4.0 km、$L_2$=6.0 km、$L_3$=5.0 km 及 $L_4$=3.0 km

高程差：$\Delta h_1$=-25.633 m、$\Delta h_2$=+37.457 m、$\Delta h_3$=+43.213 m 及 $\Delta h_4$=-55.026 m

$H_A$=534.596 m。

未知量：$H_B$，$H_C$，$H_D$

觀測數 $n$=4，未知數 $u$=3，自由度 $r=n-u$=4-3=1。

設；$H_B$之初值 $H_{Bo}=H_A+\Delta h_1=534.596+(-25.633)=508.963m$

$H_C$之初值 $H_{Co}=H_B+\Delta h_2=508.963+37.547=546.52m$

$H_D$之初值 $H_{Do}=H_C+\Delta h_3=546.42+43.213=589.633m$

∴ 假設：$H_B=508.963+x_1$，$H_C=546.42+x_2$，$H_D=589.633+x_3$

1. 權 $P\propto\frac{1}{L}$，$P_1:P_2:P_3:P_4=\frac{1}{L_1}:\frac{1}{L_2}:\frac{1}{L_3}:\frac{1}{L_4}=\frac{1}{4}:\frac{1}{6}:\frac{1}{5}:\frac{1}{3}=15:10:12:20$

2. 觀測方程式 $\begin{cases}\Delta h_1+v_1=H_B-H_A\\ \Delta h_2+v_2=H_C-H_B\\ \Delta h_3+v_3=H_D-H_C\\ \Delta h_4+v_4=H_A-H_D\end{cases}$

3. 改正數方程式

$$\begin{cases}v_1=H_B-H_A-\Delta h_1\\ v_2=H_C-H_B-\Delta h_2\\ v_3=H_D-H_C-\Delta h_3\\ v_4=H_A-H_D-\Delta h_4\end{cases},\ \begin{cases}v_1=508.963+x_1-534.596-(-25.633)\\ v_2=546.42+x_2-(508.963+x_1)-37.457\\ v_3=589.633+x_3-(546.42+x_2)-43.213\\ v_4=534.596-(589.633+x_3)-(-55.026)\end{cases}$$

$$\begin{cases}v_1=x_1\\ v_2=-x_1+x_2\\ v_3=-x_2+x_3\\ v_4=-x_3-11\end{cases}$$ 單位：mm

4. 以矩陣式表示：$V=AX-L$

$$V=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},\ L=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\11\end{bmatrix},\ P=\begin{bmatrix}15&&&\\&10&&\\&&12&\\&&&20\end{bmatrix}$$

5. 組法方程式：$NX=U$，$N=A^TPA$，$U=A^TPL$

$$N=\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}15&&&\\&10&&\\&&12&\\&&&20\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}25&-10&0\\-10&22&-12\\0&-12&32\end{bmatrix}$$

$$U=\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}15&&&\\&10&&\\&&12&\\&&&20\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\0\\0\\11\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\-220\end{bmatrix}$$

6. 計算反函數，得最佳估值 $X=N^{-1}U$

$$N^{-1}=\frac{1}{\begin{vmatrix}25 & -10 & 0\\ -10 & 22 & -12\\ 0 & -12 & 32\end{vmatrix}}\times adj\begin{bmatrix}25 & -10 & 0\\ -10 & 22 & -12\\ 0 & -12 & 32\end{bmatrix}=\frac{1}{10800}\begin{bmatrix}560 & 320 & 120\\ 320 & 800 & 300\\ 120 & 300 & 450\end{bmatrix},$$

$$X=\frac{1}{10800}\begin{bmatrix}560 & 320 & 120\\ 320 & 800 & 300\\ 120 & 300 & 450\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\ 0\\ -220\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2.44mm\\ -6.11mm\\ -9.17mm\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.0024m\\ -0.0061m\\ -0.0092m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

7. 計算 $B,C,D$ 點高程：

$$H_B=508.963+x_1=508.963+(-0.0024)=508.9606\text{m}\approx 508.961m\ ,$$

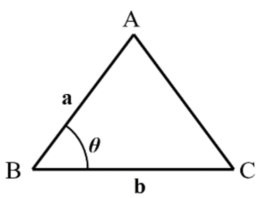
$$H_C=546.42+x_2=546.42+(-0.0061)=546.4139\approx 546.414m\ ，$$

$$H_D=589.633+x_3=589.633+(-0.0092)=589.6238\approx 589.624m$$

$\therefore\ H_B=508.961m$，$H_C=546.414m$，$H_D=589.624m$



三、如圖在臺北市區有一三角形土地 ΔABC，一測量員測得下列數據：邊長 a 丈量五次得 30.12 m、30.13 m、30.15 m、30.16 m 及 30.14 m，邊長 b 同樣丈量五次得 40.24 m、40.26 m、40.25 m、40.23 m 及 40.22 m，角度θ觀測 4 次角度分別為 44°59'58"、45°00'02"、45°00'03"及 44°59'57"。




㈠試求 ΔABC 之面積為若干坪？（10 分）（1 坪=3.30582 $m^2$）

㈡該處土地市價為每坪 1 百萬元，試計算面積標準誤差所相對應的土地

價格為何？（20 分）

【擬答】

(一)計算 ΔABC 之面積

*1.* 計算邊長 a 之最或是值 $a$ 及其標準誤差 $\sigma_a$

最或是值 $a$=(30.12 +30.13+30.15+30.16+30.14)/5=30.14

誤差 $v_1$=30.12-30.14=-0.02，同理，$v_2$=-0.01，$v_3$=0.01，$v_4$=0.02，$v_5$=0

$$[vv]=(-0.02)^2+(-0.01)^2+0.01^2+0.02^2=0.001$$

$$\text{最或是值標準誤差}\ \sigma_a=\pm\sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}}=\pm\sqrt{\frac{0.001}{5\times 4}}=\pm 0.00707m$$

*2.* 計算邊長 b 之最或是值 $b$ 及其標準誤差 $\sigma_b$

最或是值 $b$=(40.24+40.26+40.25+40.23+40.22)/5=40.24 m

誤差 $v_1$=40.24-40.24=0，同理，$v_2$=0.02，$v_3$=0.01，$v_4$=-0.01，$v_5$=-0.02

$$[vv]=(-0.02)^2+(-0.01)^2+0.01^2+0.02^2=0.001$$

$$\text{最或是值標準誤差}\ \sigma_a=\pm\sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}}=\pm\sqrt{\frac{0.001}{5\times 4}}=\pm 0.00707m$$

*3.* 計算夾角 $\theta$ 之最或是值 $\theta$ 及其標準誤差 $\sigma_\theta$

夾角 $\theta$=(44°59'58"+45°00'02"+45°00'03"+44°59'57")/4=45°00'00"

誤差 $v_1$=58-60=-2"，同理，$v_2$=2"，$v_3$=3"，$v_4$=-3"

$$[vv]=(-2)^2+2^2+3^2+(-3)^2=26$$

$$\text{最或是值標準誤差}\ \sigma_\theta''=\pm\sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}}=\pm\sqrt{\frac{26}{4\times 3}}=\pm 1.47''$$

*4.* 計算 ΔABC 之面積 A

$$A=\tfrac{1}{2}ab\times\sin\theta=\tfrac{1}{2}\times 30.14\times 40.24\times\sin 45^\circ=428.8m^2=129.711\ \text{坪}$$

(二)如該處土地市價為每坪 1 百萬元，計算面積標準誤差所相對應的土地價格

$$\frac{\partial A}{\partial a}=\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{2}ab\sin\theta\right)=\frac{1}{2}b\sin\theta=\frac{A}{a}\ ,\ \frac{\partial A}{\partial b}=\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{2}ab\sin\theta\right)=\frac{1}{2}a\sin\theta=\frac{A}{b}$$

$$\frac{\partial A}{\partial\theta}=\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{2}ab\sin\theta\right)=\frac{1}{2}ab\cos\theta=\frac{A}{\sin\theta}\times\cos\theta=\frac{A}{\tan\theta}$$

$$\sigma_A=\pm\left[\left(\frac{\partial A}{\partial a}\right)^2\times{\sigma_a}^2+\left(\frac{\partial A}{\partial b}\right)^2\times{\sigma_b}^2+\left(\frac{\partial A}{\partial\theta}\right)^2\times\left(\frac{\sigma_\theta''}{\rho''}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$=\pm\left[\left(\frac{A}{a}\times\sigma_a\right)^2+\left(\frac{A}{b}\times\sigma_b\right)^2+\left(\frac{A}{\tan\theta}\times\frac{\sigma_\theta''}{\rho''}\right)^2\right]^{1/2}=\pm A\left[\left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^2+\left(\frac{\sigma_b}{b}\right)^2+\left(\frac{\sigma_\theta''}{\tan\theta\times\rho''}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$\sigma_A=\pm 129.711\times\sqrt{\left(\frac{0.00707}{30.14}\right)^2+\left(\frac{0.00707}{40.24}\right)^2+\left(\frac{1047}{\tan 45^\circ\times 206265}\right)^2}=\pm 0.038\ \text{坪}$$

面積標準誤差所相對應的土地價格$=0.038\times 1{,}000{,}000=38{,}000$ 元

四、全球導航衛星系統（GNSS）為目前空間資訊定位的主要作業模式，請問其與訊號傳播有關的誤差為何？請詳細解釋。（25 分）

【擬答】

(一)電離層誤差

*1.* 電離層(*Ionosphere*)大約分佈在地表 50 到 1000 公里的大氣層，其中散佈著許多游離電子。由於受太陽強烈輻射及高能量粒子作用，使氣體分子離子化而產生大量的離子及游離電子，當衛星訊號通過電離層時，會受到這些離子及電子的影響，使得傳送路徑彎曲，造成訊號

所經過路線的距離，不等於衛星到接收儀的實際幾何距離。亦即，當衛星信號通過時，產生遲滯的現象，稱為電離層延遲。由於電離層的影響程度隨著時間、地點與信號頻率的不同而改變，通常難以模式化。

2. 在短基線，可假設基線兩端的電離層延遲量相同，並藉由相對定位的方式消除其影響量；但當基線逐漸增長，基線兩端電離層延遲量的差異將迅速增加，差分定位已無法將其影響完全消除，此時可利用雙頻觀測量，組成無電離層線性組合 $Lc$，消去其一階項之影響，約 95%，$Lc$ 之數學式表示如下：

$$Lc=\frac{f_1^2}{f_1^2-f_2^2}\times L_1-\frac{f_1 f_2}{f_1^2-f_2^2}\times L_2$$

式中；$f_1, f_2$ 為 $L_1, L_2$ 載波之頻率；$L_1, L_2$ 為載波相位觀測量（公尺）。

因此，對於長距離的即時動態定位而言，如何處理電離層延遲誤差，是影響解算品質最主要原因。

㈡對流層延遲誤差

1. 對流層(Troposphere)是地表上約 10 公里以內的大氣層，為中性大氣範圍。對流層延遲量之大小與溫度、濕度及氣壓有關，亦與接收儀所在高度及地形有關；延遲量在天頂方向約為 1.9 公尺至 2.5 公尺，當衛星之仰角愈低，其延遲量愈大，當仰角為 10 度時，可達 20 公尺。

2. 對流層折射影響量可分為兩部分，一為由乾空氣引起的乾分量，另一為由濕空氣引起的濕分量。一般處理流層延遲誤差的方法，分為乾空氣與濕空氣兩種分量來處理。

⑴乾空氣的分量與大氣壓力及絕對溫度有關，通常採用模式改正。

乾分量約佔對流層折射影響的 90%。

2. 濕分量與濕度、大氣壓力及絕對溫度有關。

3. 一般對於對流層延遲誤差處理方法為：

⑴避免採用低角度衛星測量。觀測時仰角設定在 15 度以上。

⑵採用對流層數學模式加以修正，如 *Hopfield*、*Modified Hopfield* 等模式。

⑶引入對流層影響的附加待估參數，在數據處理中一併求解。

⑷在短基線(例如＜10 *km*)，由於衛星信號通過對流層路徑相近，對流層物理特性相似，所以藉觀測量差分處理之方式，可明顯減弱對流層折射影響。

㈢多路徑效應

1. 多路徑效應是由於信號，從衛星發射到被接收儀接收的過程中，在周圍環境存在有高反射性的物體，使信號經由一條以上的路徑進入天線盤，稱為多路徑效應。

2. 劇烈的多路徑效應可能造成衛星訊號失鎖或週波脫落。由於多路徑效應的發生，與施測地點周遭的環境有關，一般無法加以模式化，除了在外業實施時，儘量避開多路徑效應嚴重的地點外，只能以硬體設計，如增加天線盤檔板的方式，或是以數學模式儘量消除其影響。