

113 年公務人員高等考試三級考試試題

類 科：經建行政、農業行政

科 目：統計學

考試時間：2 小時

吳迪 老師

三個統計分配的右尾機率表：

(一)標準常態分配 Z 的右尾機率表：

	$P(Z > Z_{\alpha}) = \alpha$				
α	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
Z_{α}	1.282	1.645	1.96	2.326	2.576

(二) t 分配與 X^2 分配的右尾機率表：

$P(t > t_{\text{自由度}, \alpha}) = \alpha$			$P(X^2 > X^2_{\text{自由度}, \alpha}) = \alpha$		
自由度	$t_{\text{自由度}, 0.025}$	$t_{\text{自由度}, 0.05}$	自由度	$X^2_{\text{自由度}, 0.025}$	$X^2_{\text{自由度}, 0.05}$
4	2.776	2.132	1	5.0239	3.8415
5	2.571	2.015	2	7.3778	5.9915
6	2.447	1.943	3	9.3484	7.8147
10	2.228	1.812	4	11.1433	9.4877
11	2.201	1.796	5	12.8325	11.0705
12	2.179	1.782	6	14.4494	12.5916

一、有一位理財規劃專員為客戶規劃了一個投資組合，其設計為 0.7 的比例投資 A 公司股票，0.3 的比例投資 B 公司股票。由歷年資料計算得知投資 A 報酬率的平均數為 12%，標準差為 15%；投資 B 報酬率的平均數為 5%，標準差為 8%。回答問題(一)至(四)，寫出計算過程且四捨五入至小數點後第 4 位。

(一)這個投資組合報酬率的平均數為多少？(4 分)

(二)若投資 A 和投資 B 報酬率之間的相關係數為 -0.3，則這個投資組合的報酬率離平均數的 1 個正、負標準差的上、下限數值各是多少？(10 分)

(三)若問題(二)得到的下限數值為不低於 -0.05，理專就會建議客戶可以考慮採納此投資組合，理專是根據什麼理由採取這種建議？(5 分)

(四)為評估資金「全部投資 A」，或「全部投資 B」，或「採取 0.7 的比例投資 A 以及 0.3 的比例投資 B 的投資組合」三種策略的風險，請計算此三種策略的變異係數。(6 分)

1. 《考題難易》：★★(最難 5 顆星)
 2. 《解題關鍵》：期望值與變異數的基本公式,基本題
 3. 《命中特區》：吳迪著「統計學」P4-12

【擬答】：

設 X 為 A 報酬率 Y 為 B 報酬率

(一) $E(0.7X + 0.3Y) = 0.7E(X) + 0.3E(Y)$

$$= 0.7 \times 12\% + 0.3 \times 5\% = 0.099$$

(二) $var(0.7X + 0.3Y)$

$$= 0.7^2 \times 0.15^2 + 0.3^2 \times 0.08^2 + 2 \times 0.7 \times 0.3 \times (-0.3) \times 0.15 \times 0.08$$

$$= 0.010089$$

$$\Rightarrow \text{標準差} = \sqrt{0.010089} = 0.1004$$

$$\text{上限值} = 0.099 + 0.1004 = 0.1994$$

下限值 $=0.099-0.1004=-0.0014$

(三)因為下限值 -0.0014 不低於 -0.05 所以可以建議客戶考慮採納此投資組合，因為虧損的風險低

(四)(1)全部投資 A 之 $CV = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{0.15}{0.12} = 1.25$

(2)全部投資 B 之 $CV = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{0.08}{0.05} = 1.6$

(3) $0.7A$ 及 $0.3B$ 之 $CV = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{0.1004}{0.099} = 1.01$

二、若已知簡單線性迴歸模型為

$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, n$ ，假設 ε_i 為相互獨立且具有共同分配 $N(0, \sigma^2)$ 。令 y_i 的最小平方估計值為 $\hat{y}_i = a + bx_i$ ，回答以下問題：

(一)令 $u_i = y_i - \bar{y}$ ， $v_i = x_i - \bar{x}$ ，及此變數變換後之 u_i 的最小平方估計值為 $\hat{u}_i = c + dv_i$ ，其中 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 分別表示 n 個 x_i 和 n 個 y_i 的樣本平均。請推導出 c 和 d 。(5分)

(二)令 $Z_i = \frac{y_i - \bar{y}}{s_y}$ ， $W_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s_x}$ ，及此變數變換後之 z_i 的最小平方估計值為 $\hat{Z}_i = g + hw_i$ ，其中 S_x 和

S_y 分別表示 n 個 x_i 和 y_i 的樣本標準差。請推導出 g 和 h 。(5分)

(三)已知 x_i 的資料結構可以分成二部分，其中第一個部分的 n_1 個資料點的數值皆為1，即

$x_i = 1, i = 1, 2, \dots, n_1$ ；第二個部分的 n_2 個資料點的數值皆為0，即 $x_i = 0, i = n_1 + 1, n_1 + 2, \dots, n, n = n_1 + n_2$ 請推導出 a 和 b 。(10分)

1. 《考題難易》：★★★ (最難5顆星)

2. 《解題關鍵》：考迴歸方程式最小平方法及變數的轉換,103地特出現類似考題

3. 《命中特區》：吳迪著"統計學精典歷屆申論題型" P10-42

【擬答】：

(一) $u_i = Y_i - \bar{Y} \Rightarrow S_u = S_Y, \bar{u} = 0$

$v_i = x_i - \bar{x} \Rightarrow S_v = S_X, \bar{v} = 0$

(1) $d = r \frac{S_u}{S_v} = r \frac{S_Y}{S_X} = b$

(2) $c = \bar{u} - d\bar{v} = 0$

(二)

$Z_i = \frac{Y_i - \bar{Y}}{S_Y} \Rightarrow S_Z = 1, \bar{Z} = 0$

$W_i = \frac{X_i - \bar{X}}{S_X} \Rightarrow S_W = 1, \bar{W} = 0$

(1) $h = r \frac{S_Z}{S_W} = r$ ，其中 r 為 X, Y 相關係數

(2) $g = \bar{Z} - h\bar{W} = 0$

(三)

$\sum_{i=1}^n X_i = n_1, \sum_{i=1}^n X_i^2 = n_1, \text{ 令 } \bar{Y}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} Y_i}{n_1}, \bar{Y}_2 = \frac{\sum_{i=n_1+1}^n Y_i}{n_2}$

$\sum_{i=1}^n X_i Y_i = \sum_{i=1}^{n_1} Y_i$

(1) $b = \frac{SS_{XY}}{SS_X} = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} Y_i - \frac{n_1 \sum_{i=1}^{n_1} Y_i}{n}}{n_1 - \frac{n_1^2}{n}} = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} Y_i}{n_1} - \frac{\sum_{i=n_1+1}^n Y_i}{n_2} = \bar{Y}_1 - \bar{Y}_2$

$$\begin{aligned}
 (2) a &= \bar{Y} - b\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n_1} Y_i}{n_1} - \frac{\sum_{i=n_1+1}^{n_2} Y_i}{n_2} \right) \frac{n_1}{n} \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n_1} Y_i}{n} + \frac{n_1 \sum_{i=n_1+1}^{n_2} Y_i}{n_2 n} \\
 &= \frac{\sum_{i=n_1+1}^n Y_i}{n} + \frac{n_1 \sum_{i=n_1+1}^{n_2} Y_i}{n_2 n} = \frac{\sum_{i=n_1+1}^n Y_i}{n_2} = \bar{Y}_2
 \end{aligned}$$

志光 學儒 保成 高普考奪榜特訓班

奪榜特訓班 狀元世家連霸 橫掃全國再奪第 1

經建行政 王○懿 普考探花	金融保險 林○青 高考狀元	人事行政 林 ○ 高考狀元・普考探花	人事行政 鍾○玲 高考第六・普考狀元
文化行政 楊○緝 普考狀元	社會行政 梁○嶠 高考狀元・普考狀元	社會行政 何○韻 普考探花	教育行政 廖○雅 高考榜眼

狀元 高普經建行政 蔡○諭	狀元 普考文化行政 張○迎	狀元 普考一般行政 楊○蘭	狀元 普考經建行政 廖○雅	狀元 高普戶政 張○瑞	狀元 普考一般行政 李○尊	狀元 地方特考三等 人事新北市 林○地	狀元 地方特考四等 戶政台北市 賴○敏
狀元 高普人事行政 高○蔚	狀元 高普一般民政 葉○蒙	狀元 普考一般行政 蘇○昇	榜眼 普考經建行政 蔡○諭	榜眼 普考財政行政 曾 ○	榜眼 高普一般行政 邱○翰	榜眼 高普文化行政 張○瑄	榜眼 高普社會行政 趙○慶
榜眼 普考一般行政 邱○翰	探花 高普財政行政 曾 ○	探花 普考金融保險 陳○毅	探花 普考文化行政 張○理	探花 普考一般行政 莊○盈	探花 高普一般行政 趙○翔	探花 高普勞工行政 林○俊	KEEP FOR YOU

三、有一個手機廠商準備推出一款新式樣的手機 A，為了解市場接受程度，進行以下所述的顧客偏好度調查：隨機選取 100 位女性及 100 位男性，對二組內的每一個人給予他們一款 A 式樣手機和一款競爭廠商的 B 式樣手機，詢問他們偏好那一款手機；結果顯示女性有 85 位偏好 A 式樣，男性有 75 位偏好 A 式樣。以 p_1 表示女性群體對 A 手機的偏好度， p_2 表示男性群體對 A 手機的偏好度，在顯著水準為 0.05 下，回答以下問題：

- (一)由二項分配觀點出發，在可以引用中央極限定理之下，以檢定統計量 Z 檢定女性和男性對 A 式樣手機的偏好度有無差異。(8 分)
- (二)由列聯表分析觀點出發，以卡方檢定統計量檢定「女性組內之 A 與非 A 的比例」與「男性組內之 A 與非 A 的比例」有無差異。(8 分)
- (三)題(二)之卡方檢定屬於「適合度檢定」、「齊一性檢定」、或「獨立性檢定」中之何種檢定，說明你的看法。(4 分)

1. 《考題難易》：★★ (最難 5 顆星)
2. 《解題關鍵》：二個母體比例 P 的檢定及卡方齊一性檢定,基本題
3. 《命中特區》：吳迪著”統計學”P12-17

【擬答】：

- (一)設女性偏好 A 之比例為 $\hat{p}_1 = \frac{85}{100} = 0.85$
 男性偏好 B 之比例為 $\hat{p}_2 = \frac{75}{100} = 0.75$

$$\text{合併比例 } \hat{P} = \frac{85+75}{100+100} = 0.8$$

$$\begin{cases} H_0 : P_1 = P_2 \\ H_1 : P_1 \neq P_2 \end{cases}$$

因為 $n_1 = n_2 = 100$ 大樣本，利用 Z 檢定

$$\alpha = 0.05$$

$$C = \{Z | Z > 1.96 \text{ 或 } Z < -1.96\}$$

$$Z = \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - (P_1 - P_2)}{\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n_1} + \frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n_2}}} = \frac{(0.85 - 0.75) - 0}{\sqrt{\frac{0.8 \times 0.2}{100} + \frac{0.8 \times 0.2}{100}}} = 1.77 \notin C \Rightarrow \text{not ReHo}$$

結論：沒有證據顯示女性和男性對 A 式樣手機的偏號有差異

(二)

偏好 \ 性別	女性	男性	合計
A	85 (80)	75 (80)	160
非 A	15 (20)	25 (20)	40
合計	100	100	200

H_0 : 女性與男性組內之 A 與非 A 的比例無差異

H_1 : 女性與男性組內之 A 與非 A 的比例有差異

$$\alpha = 0.05$$

$$C = \{\chi^2 | \chi^2 > \chi^2_{0.05}(1) = 3.8415\}$$

$$\chi^2 = \sum \sum \frac{(O_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}} = \frac{(85 - 80)^2}{80} + \dots + \frac{(25 - 20)^2}{20} = 3.125 \notin C \Rightarrow \text{not ReHo}$$

結論：沒有證據顯示女性與男性組內之 A 與非 A 的比例有差異

(三) 檢定每一個特性的某一種比例是否相同屬於卡方齊性檢定

志光×學儒×保成

穩佔高普 穩穩上榜 做你的神兵利器

高普考進階課程



階梯式課程設計 鞏固考取實力

■ 理論建構縱向連貫

01 基礎班

02 考前總複習班

03 多循環正規班

■ 知識運用橫向整合

04 申論作答班

05 測驗常考易錯

依各區規劃為主，請洽全國門市

四、為瞭解大學畢業生投入A產業與B產業的起始月薪是否有顯著差異，有一家市場調查公司自二個產業的新進人員母體中隨機抽取了以下樣本數為6的A、B二組起始月薪樣本資料(單位：千元)：

A 產業	29	31	32	32	33	35
B 產業	32	33	34	35	41	41

假設二母體資料分配都是常態分配且二分配的變異數相等，根據這個假設，回答以下四個子問題：

(一)計算出虛無假設：「二母體資料的平均數沒有差異」下的t檢定統計量的估計量，計算過程必須列出。(10分)

(二)利用單因子變異數分析法再次檢定「二母體資料的平均數是否有差異」，計算出變異數分析(ANOVA)表中的每一個數值即可，計算過程必須列出。(10分)

(三)令Z表示標準常態分配，U表示自由度n的卡方分配，W表示自由度m的卡方分配，且Z、U、W三者彼此相互獨立。寫出檢定統計量t與F的定義，並根據這二個定義寫出這二個檢定統計量的關係表達式。(10分)

(四)利用題(三)的結果及所附三個統計分配的右尾機率表，在顯著水準5%之下，寫出題(二)中利用單因子變異數分析方法檢定「二母體資料的平均數是否有差異」的拒絕域及結論。(5分)

1.《考題難易》：★★(最難5顆星)

2.《解題關鍵》：二母體比例的檢定及ANOVA,基本題

3.《命中特區》：吳迪著「統計學」P9-4~P9-8

【擬答】：

(一)設 X_1 為A產業的起薪

X_2 為B產業的起薪

$$\bar{X}_1 = 32, S_1^2 = 4, \bar{X}_{..} = 34$$

$$\bar{X}_2 = 36, S_2^2 = 16$$

$$\text{因為 } \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = S_p^2$$

$$\Rightarrow S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{(6 - 1) \times 4 + (6 - 1) \times 16}{6 + 6 - 2} = 10$$

檢定統計量

$$t = \frac{(\bar{X}_2 - \bar{X}_1) - (\mu_2 - \mu_1)}{\sqrt{\frac{S_p^2}{n_1} + \frac{S_p^2}{n_2}}} = \frac{(36 - 32) - 0}{\sqrt{\frac{10}{6} + \frac{10}{6}}}$$

$$= 2.19$$

(二) $SST = SSTR + SSE$

$$SSTR = \sum n_i (\bar{X}_i - \bar{X}_{..})^2 = 6(32 - 34)^2 + 6(36 - 34)^2 = 48$$

$$SSE = \sum (n_i - 1) S_i^2 = (6 - 1) \times 4 + (6 - 1) \times 16 = 100$$

$$SST = SSTR + SSE = 148$$

ANOVA 表

來源	SS	df	MS	F 值
處理	48	1	48	F=4.8
誤差	100	10	10	
總變異	148	11		

$$(三)(1) t = \frac{\frac{Z}{\sqrt{U}}}{\sqrt{\frac{U}{n}}} \sim t_{(n)}$$

$$(2) F = \frac{\frac{n}{W}}{\frac{m}{m}} \sim F_{(n,m)}$$

$$(3) F_{\alpha}(1, n) = t_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)$$

$$(四) \begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

$$\alpha = 0.05$$

$$C = \{F | F > F_{0.05}(1, 10) = 4.96\}$$

$$\text{其中 } F_{0.05}(1, 10) = t_{0.025}^2(10) = 2.228^2 = 4.96$$

$$F = 4.8 \notin C \Rightarrow \text{not ReHo}$$

結論：沒有證據顯示二母體資料的平均數有差異

志光×學儒×保成
為你絕佳助攻

5大衝刺課程

帶你直攻
地方特考

測驗常考易錯

埋頭苦練 不如讓老師點通學習之路

常考題型 知識強化

易錯題型 觀念釐清

總複習

考點update!時事修法update!

關鍵考點

考前複習

最新考情

短期密集

題庫班

各科名師專業訓練 審題神速、答題神準
讀書精熟+答題精準=快速上榜

題庫演練

精準教學

解題技巧

作文實戰班

作文學得好，同時提升寫作能力與論述邏輯

高分
寫作指引

強化
論述深度

架構
分層演練

新式
作文教戰