

113 年公務人員普通考試試題

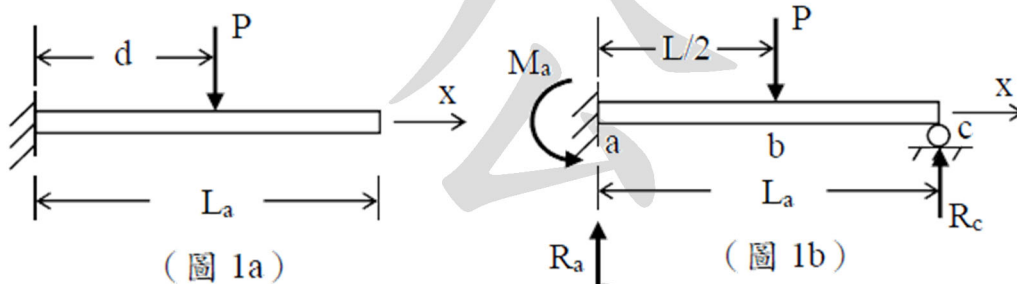
等 別：四等

類 科：土木工程

科 目：材料力學概要

邱鴻昇老師解題

- 一、已知懸臂梁在自由端承受一垂直集中載重 P 時，載重點的傾角為 $PL^2/(2EI)$ ，垂直位移為 $PL^3/(3EI)$ 。試以此結果出發，令 EI 為梁之撓曲剛度，求（圖 1a）自由端之傾角與位移，依據此結果，在（圖 1b）中，以右端點 c 之支承反力 R_c 為贅餘力，計算固定端之支承反力 M_a 與 R_a ，以及梁右端點 c 逆時針旋轉之傾斜角 θ_c 。（25 分）



【解題關鍵】

1. 《考題難易》★★
2. 《破題關鍵》圖 1a， P 力右方桿件無彎曲，可由基本變位公式延伸求得自由端變位。

【擬答】

[解一] 計算圖 1a 自由端之傾角與位移

(一) 計算 P 力處，垂直位移 δ_P 及傾角 θ_P

$$\delta_P = \frac{P \cdot (d)^3}{3EI}$$

$$\theta_P = \frac{P \cdot (d)^2}{2EI}$$

(二) 計算自由端垂直位移 δ_F 及傾角 θ_F

$$\delta_F = \delta_P + \theta_P \cdot L_a = \frac{P \cdot (d)^3}{3EI} + \frac{P \cdot (d)^2}{2EI} \cdot L_a$$

$$\theta_F = \theta_P = \frac{P \cdot (d)^2}{2EI}$$

[解二] 計算圖 1b 固定端之支承反力 M_a 與 R_a ，以及梁右端點 c 逆時針旋轉之傾斜角 θ_c (一) 計算 P 力造成自由端之變位 $\delta_{F,P}$

$$\delta_{F,P} = \frac{P \cdot (L/2)^3}{3EI} + \frac{P \cdot (L/2)^2}{2EI} \cdot L_a (\downarrow)$$

(二) 計算贅餘力 R_c 造成自由端之變位 $\delta_{F,R}$

$$\delta_{F,R} = \frac{R_c \cdot (L_a)^3}{3EI} (\uparrow)$$

(三)由諧和變位法求 R_C

$$\delta_{F,P} - \delta_{F,R} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{P \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^3}{3EI} + \frac{P \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2}{2EI} \cdot L_a - \frac{R_C \cdot (L_a)^3}{3EI} = 0, \text{ 得 } R_C = \frac{2PL^3 + 3PL^2 \cdot L_a}{16L_a^3} (\uparrow)$$

(四)計算支承反力 M_a 及 R_a

$$M_a = R_C \cdot L_a - P \cdot \frac{L}{2} = \frac{2PL^3 + 3PL^2 \cdot L_a}{16L_a^2} - P \cdot \frac{L}{2}$$

$$R_a = P - R_C = \frac{16 \cdot P \cdot L_a^3 - (2PL^3 + 3PL^2 \cdot L_a)}{16L_a^3}$$

(五)計算c點傾斜角 θ_c

$$\theta_c = \frac{R_C \cdot L_a^2}{2EI} - \frac{P \cdot (L/2)^2}{2EI} = \frac{R_C \cdot L_a^2}{2EI} - \frac{P \cdot L^2}{8EI}$$

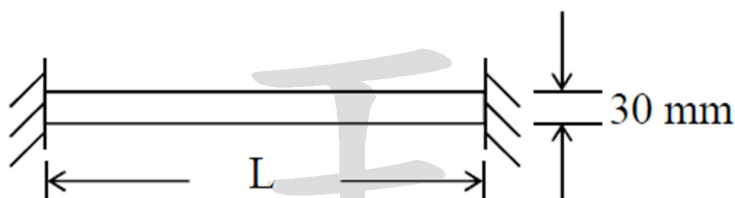
Ans :

$$M_a = \frac{2PL^3 + 3PL^2 \cdot L_a}{16L_a^2} - P \cdot \frac{L}{2}$$

$$R_a = \frac{16 \cdot P \cdot L_a^3 - (2PL^3 + 3PL^2 \cdot L_a)}{16L_a^3} (\uparrow)$$

$$\theta_c = \frac{R_C \cdot L_a^2}{2EI} - \frac{P \cdot L^2}{8EI}, \quad R_B = 3,240(N)(\leftarrow)$$

二、一橫梁由彈性材料所組成，兩端固定，如（圖 2）所示，斷面為高 30mm、寬 20mm 之矩形，其彈性係數為 $E=60000\text{MPa}$ ，熱膨脹係數為 $\alpha=1.2 \times 10^{-5} (1/^\circ\text{C})$ 。此時若將梁上方溫度提高 5°C ，且將梁下方溫度提高 15°C ，假設升溫前，梁未受力，試問升溫後，牆壁給梁之支承軸力 F 與彎矩 M 為何？（25 分）



(圖 2)

【解題關鍵】

1. 《考題難易》★★★
2. 《破題關鍵》

溫度變化造成旋轉角 $d\theta$ ，係較常忽略之題型，破題關鍵 $d\theta = \frac{\alpha \Delta T dx}{h}$ ，其餘均為常見之計算。

【擬答】

(一)將右端支承反力化為贅力 R_B 及 M_B

$$1. \text{ 溫差造成右端旋轉角： } 1 \cdot \theta_{B,1} = \int m \frac{\alpha \Delta T dx}{h} = \frac{1.2 \cdot 10^{-5} \cdot (15-5) \cdot L}{30} = 4 \cdot 10^{-6} \cdot L$$

$$2. \text{ 贅力 } M_B \text{ 造成右端旋轉角： } 1 \cdot \theta_{B,2} = \int \frac{M_B \cdot m}{EI} dx = \frac{M_B L}{EI}$$

3. 溫差造成桿件伸長量： $\Delta_1 = \alpha \cdot \left(\frac{5+15}{2}\right) \cdot L = 1.2 \cdot 10^{-5} \cdot (10) \cdot L = 1.2 \cdot 10^{-4} \cdot L$

4. 贅力 R_B 造成桿件伸長量： $\Delta_2 = \frac{R_B \cdot L}{AE}$

(二) 由諧和變位法，求支承反力 F_B 及 M_B

$I = \frac{20 \cdot 30^3}{12} = 45000(\text{mm}^4)$ ， $A = 30 \cdot 20 = 600(\text{mm}^2)$

由諧和變位法： $\theta_{B,1} = \theta_{B,2} \Rightarrow M_B = 4 \cdot 10^{-6} \cdot EI$ 得 $M_B = 10,800(\text{N} \cdot \text{mm})(\text{順})$

由諧和變位法： $\Delta_1 = \Delta_2 \Rightarrow F_B = 1.2 \cdot 10^{-4} \cdot AE$ 得 $F_B = 3,240(\text{N})(\leftarrow)$



Ans: $M_B = 10,800(\text{N} \cdot \text{mm})$ ， $F_B = 3,240(\text{N})(\leftarrow)$

[志聖土木 × 超級函授] 全方位學習再進化!

線上上課+課後複習 超便利! ♡服務加倍♡學習加倍♡便利加倍

\雲學習端 超彈性/



完整課程 上榜沒問題!



24hr 雲端 線上隨時上課



申論練筆 名師批閱指導



線上課業諮詢 專屬APP



中華電信 智能雲端平台

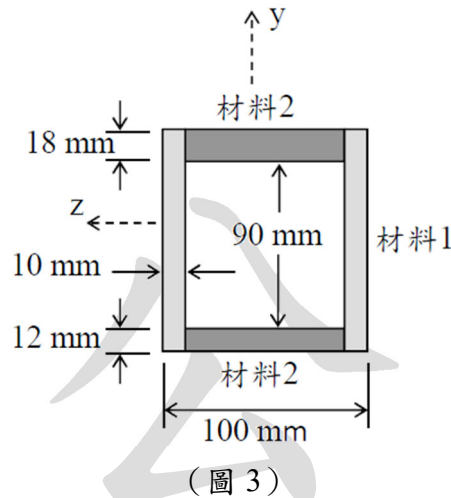


\我們全力提供更好的學習/

國考技巧 打造上榜力

公職王歷屆試題 (113 普考)

三、一左右對稱之箱型梁由兩種材料所製成，斷面尺寸如圖 3 所示。此斷面在 z -軸向承受一純彎矩 M_z ，若材料 1 與材料 2 為相同材料，試求中性軸（也就是 z -軸）距離底緣的高度 c 。若材料 2 的彈性係數 E_2 為材料 1 的彈性係數 E_1 之兩倍， $E_2=2E_1$ ，則中性軸距離底緣的高度又為何？（25 分）



【解題關鍵】

1. 《考題難易》★★
2. 《破題關鍵》複合材料轉換斷面考題，屬標準題型，注意斷面轉換係數即可。

【擬答】

(一) $E_1 = E_2$ 時，計算斷面中性軸位置 c 。

$$c = \frac{10 \cdot 120 \cdot (60) \cdot 2 + 80 \cdot 12 \cdot (6) + 80 \cdot 18 \cdot (111)}{10 \cdot 120 \cdot 2 + 80 \cdot 12 + 80 \cdot 18} = 64.5 \text{ mm (距底部)}$$

(二) $2E_1 = E_2$ 時，計算斷面中性軸位置 c 。

斷面轉換係數 $n = \frac{E_2}{E_1} = 2$ (材料 2 寬度放大 2 倍)

$$c = \frac{10 \cdot 120 \cdot (60) \cdot 2 + 160 \cdot 12 \cdot (6) + 160 \cdot 18 \cdot (111)}{10 \cdot 120 \cdot 2 + 160 \cdot 12 + 160 \cdot 18} = 66 \text{ mm (距底部)}$$

Ans :

$E_1 = E_2$ 時，中性軸位置 $c = 64.5 \text{ mm}$

$2E_1 = E_2$ 時，中性軸位置 $c = 66 \text{ mm}$

選擇志聖.志光.學儒.超級函授 選擇上榜

土木金榜創佳績

22大雙榜 14大狀元 13大榜眼 7大探花



楊○禮

高普考土木工程
專技高考土木技師



王○男

地特三等雲嘉區
地特四等雲嘉區



王○銘

專技高考土木工程
高考土木工程



吳○偉

高考土木工程
普考土木工程



田○妮

原特四等土木工程



許○捷

調查局三等
營繕工程組



林○宏

台電僱員東區
土木工程類



邱○慶

水利署灌溉
工程人員台東



黃○華

地特四等新北市



何○宇

水利署灌溉
工程人員宜蘭



洪○祥

水利署灌溉
工程人員嘉南



陳○旻

地特四等花東區



林○隆

檢察事務官
(營繕工程組)



林○豪

水利署灌溉
工程人員彰化

優秀考取



許○華

連續考取

112土木技師+高考土木工程

土木高考是CP值最高的公職考科, 我利用晚上看課程(兼職Uber), 感謝家人的支持。

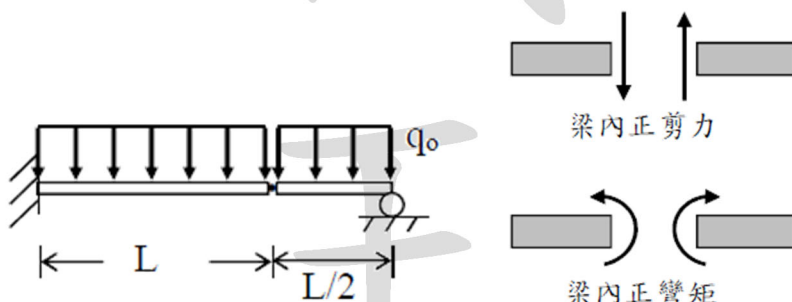
王○鈞

一年考取

高普考土木工程雙榜

補習班系統性的整理各科重點加上老師的講解, 讓更容易把考科吸收進大腦中。

四、一水平梁承受強度為 q_0 之均布載重, 此梁為兩段式, 左端固定, 兩段之間為鉸接, 右端為一滾支承, 如 (圖 4a) 所示。梁內正剪力與正彎矩方向定義如 (圖 4b), 試繪製相應之剪力圖與彎矩圖。(25 分)



(圖 4a)

(圖 4b)

【解題關鍵】

1. 《考題難易》★
2. 《破題關鍵》靜定結構, 善用取分離體技巧, 可順利算出內力。

【擬答】

(一)計算支承反力

設固定端為 A 點, 鉸接點為 B 點, 輓支承為 C 點

取 BC 分離體, 列平衡方程式求 C 點支承反力 R_C

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow R_C \cdot \frac{L}{2} = q_0 \cdot \frac{L}{2} \cdot \left(\frac{L}{4}\right), \text{ 得 } R_C = \frac{q_0 \cdot L}{4} (\uparrow)$$

由整體分離體，列平衡方程式求 C 點支承反力 R_C

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow M_A - q_0 \cdot \frac{3L}{2} \cdot \left(\frac{3L}{4}\right) + \frac{q_0 \cdot L}{4} \cdot \left(\frac{3L}{2}\right) = 0, \text{ 得 } M_A = \frac{3q_0 \cdot L^2}{4} (\text{順})$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_A - q_0 \cdot \frac{3L}{2} + \frac{q_0 \cdot L}{4} = 0, \text{ 得 } R_A = \frac{5q_0 \cdot L}{4} (\uparrow)$$

(二)繪製剪力彎矩圖

