

高雄市 115 學年度市立高級中等學校聯合教師甄選  
數學科試題卷

【※答案一律寫在答案本上】

一、計算證明題（1 至 6 題每題 5 分，7 至 16 題每題 7 分，共 100 分）

請用藍或黑色原子筆寫下完整計算過程，否則不予計分

1. 給定空間中四點  $O(0,0,0)$ ， $A(-11,1,2)$ ， $B(1,1,5)$ ， $C(7,-2,-1)$ ，

設  $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$ ， $0 \leq x \leq 1$ ， $0 \leq y \leq x$ ， $y \leq z \leq 1$ ，

試求  $\overrightarrow{OP}$  之終點  $P$  所形成區域的體積。

2. 圖 1 為函數  $f(x) = a\cos(bx+c)+k$  的圖形，

其中  $A(\frac{5\pi}{18}, 1)$ ， $B(\frac{11\pi}{18}, 4)$ ， $b > 0$ ， $\pi < c \leq 2\pi$ ，試問數對  $(a, b, c, k)$ 。

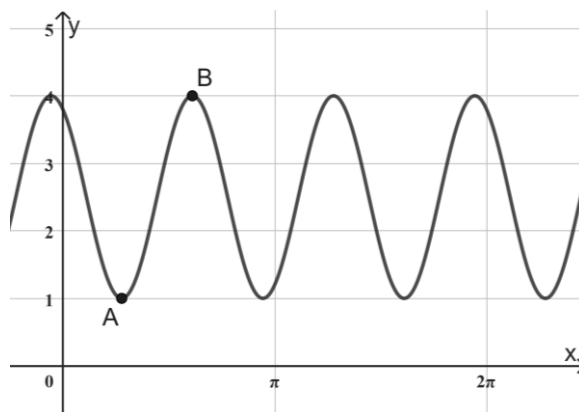


圖 1

3. 若函數  $f(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)}{x-3}$ ，則導數  $f'(2) = ?$



4. 想要給  $4 \times 4$  方格中標記上「圈圈」與「叉叉」，

使得每一行或每一列正好有兩個「圈圈」和「叉叉」方格，

一共有幾種不同方法？

5. 設  $\log A = a$ ， $\log B = b$ ， $\log C = c$ ，且  $a + b + c = 0$ ，

求  $A^{\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)} \cdot B^{\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right)} \cdot C^{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}$  之值。

6. 袋中十顆球分別為 1、2、 $\dots$ 、9、10 號球，從袋中隨機拿取三顆球，

求此三球球號數兩兩互質的機率為何？

7. 已知二次實係數多項式  $f(x)$  及三次實係數多項式  $g(x)$  領導係數皆為 1，

且  $g(x)$  除以  $f(x)$  的餘式為  $x + 2$ ， $(f(x))^2$  除以  $g(x)$  的餘式為  $2x - 1$ ，

試求兩多項式  $f(x)$ 、 $g(x)$ 。



8. 已知  $y = 8x^2 - 36x + 34$  和  $y = \frac{k}{x}$  交於  $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 、 $C(x_3, y_3)$  三點，

若  $x_1$ 、 $x_2$ 、 $x_3$  成等差數列，試問  $k$  之值為何？

9. 已知坐標平面上一點  $P$ ，先對直線  $y = x$  對稱後再對直線  $y = 2x$  對稱

的點坐標，會與  $P$  直接對直線  $y = 3x$  對稱的點坐標相等。

若滿足這樣條件的點必落在直線  $y = mx$  上，試求  $m$ 。

10. 求方程式  $x^2 + y^2 = 6x + 6\sqrt{3}|y|$  之圖形所圍成區域的周長。

11. 設  $z$  為一複數。若  $\frac{2z - (9 + 3\sqrt{3}i)}{z} = \sqrt{3}(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)$ ，

試求  $\text{Arg}\left(\frac{z - (3 + \sqrt{3}i)}{z}\right)$  之值。



12. 試問  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{3n+6} + \frac{1}{3n+12} + \frac{1}{3n+18} + \dots + \frac{1}{3n+6n} \right)$  之值為何？

13. 設  $[x]$  為不超過  $x$  的最大整數，求  $\left[ \frac{1}{\sqrt{115}} + \frac{1}{\sqrt{117}} + \frac{1}{\sqrt{119}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2025}} \right]$  之值。

14. 在海軍演習的雷達螢幕上，兩架無人機正在執行飛行測試，它們在同一時間出發，偵察機從  $A(1,0,2)$  沿著直線等速飛行 2 秒後到達位置  $B(5,4,0)$ 。攔截機從  $C(1,11,13)$  沿著直線等速飛行 1 秒後到達位置  $D(2,9,10)$ ，假設經過一段時間後，兩架無人機的距離最近，試求此時的最近距離。

15. 空間中直線  $L_1: \frac{2-x}{2} = \frac{1+y}{-1} = \frac{1-z}{2}$ 、 $L_2: \frac{1-x}{2} = \frac{1-y}{-2} = \frac{2+z}{1}$ 。

若  $L_1$  落在平面  $E$  上，且  $L_2$  和平面  $E$  的夾角之餘弦值為  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，

試問平面  $E$  的方程式為何？

16. 求證  $\frac{1}{\sin 24^\circ} + \frac{1}{\sin 48^\circ} + \frac{1}{\sin 96^\circ} = \frac{1}{\sin 168^\circ}$ 。

